Les vecteurs en Seconde

1. Notion de vecteur

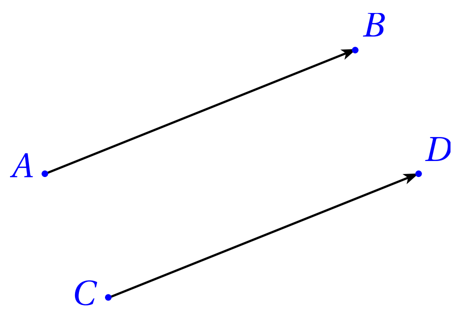
Définition

Un **vecteur** est défini par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur**.

Remarque

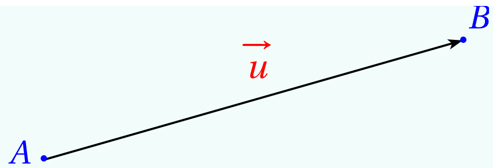
Le mot **direction** désigne la direction de la droite qui « porte » ce vecteur; le mot **sens** permet de définir un sens de parcours sur cette droite parmi les deux possibles.

Exemple



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens, la même longueur. Ils sont égaux.

Remarque



Pour nommer un vecteur on peut :

- utiliser l'origine et l'extrémité d'un représentant du vecteur : on parlera du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- lui donner un nom à l'aide d'une lettre (en générale minuscule) : on parlera alors du vecteur $\vec{u}$

Définition

$\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ... représentent un même vecteur de longueur nulle appelé **vecteur nul** et noté $\overrightarrow{0}$.

Remarque

Le vecteur nul est assez particulier. En effet, contrairement aux autres vecteurs, il n'a ni direction, ni sens! Mais il intervient souvent dans les calculs.

Définition

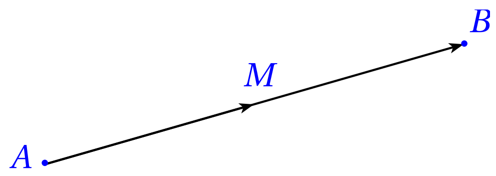
On appelle **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on note $||\overrightarrow{AB}||$ la longueur du segment $[AB]$.

Remarque

On a donc $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Propriété

M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

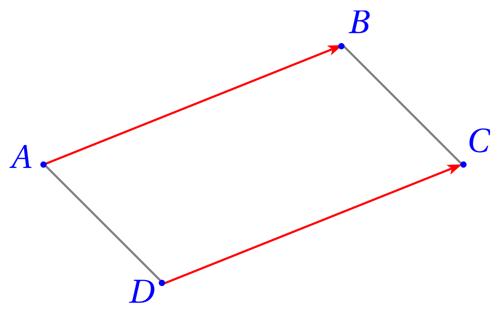


Remarque

On rappelle que l'égalité de distance $AM = MB$ est insuffisante pour montrer que M est le milieu de $[AB]$ (cette égalité montre seulement que M est équidistant de A et B c'est à dire est sur la médiatrice de $[AB]$). L'égalité de vecteurs $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, par contre, suffit à montrer que M est le milieu de $[AB]$.

Propriété

Le quadrilatère $(ABCD)$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



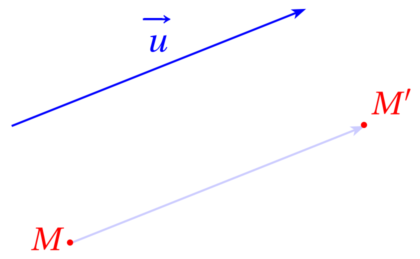
Remarques

- Attention à l'inversion des points C et D dans l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

- Avec cette propriété, il suffit de prouver **une seule égalité** pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme. C'est une méthode plus puissante que celles vues en 4ème qui nécessitaient de démontrer deux propriétés (double parallélisme ou parallélisme et égalité de longueurs, etc.)

Définition

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



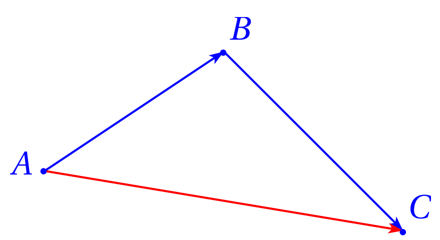
Translation de vecteur $\vec{u}$

2. Somme de vecteurs

On définit l'addition de deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles:

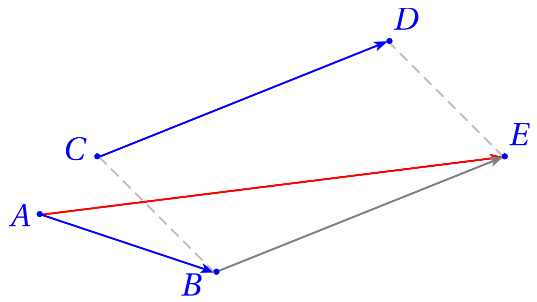
Propriété

Pour tous points A, B et C du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(Relation de Chasles)*



Pour appliquer la relation de Chasles, il faut que l'extrémité du premier vecteur coïncide avec l'origine du second. Pour additionner deux vecteurs qui ne sont pas dans cette configuration, on « reporte l'un des vecteurs à la suite de l'autre ».

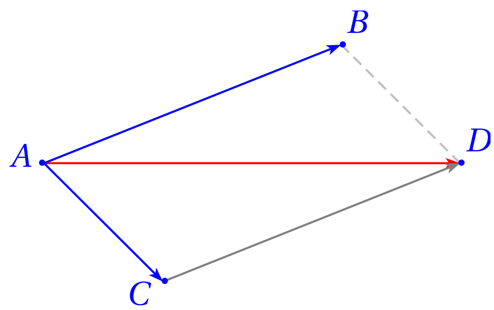
Exemple



Pour tracer la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ on reporte le vecteur $\overrightarrow{CD}$ à la suite du vecteur $\overrightarrow{AB}$; cela donne le vecteur $\overrightarrow{BE}$ qui est égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$.

On applique alors la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$. La somme cherchée peut donc être représentée par le vecteur $\overrightarrow{AE}$.

Cas particulier



Si les vecteurs à additionner, ont la même origine, la méthode précédente aboutit à la construction d'un parallélogramme $(ABDC)$:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

Propriété et définition

Pour tout point A et B du plan : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont **opposés** et l'on écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Remarque

Deux vecteurs opposés ont la même direction, la même longueur et des sens contraires.

Conséquence

On peut donc définir la différence de 2 vecteurs par :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

3. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et soit k un nombre réel.

On définit le vecteur $k\vec{u}$ de la manière suivante :

Si k est **strictement positif** :

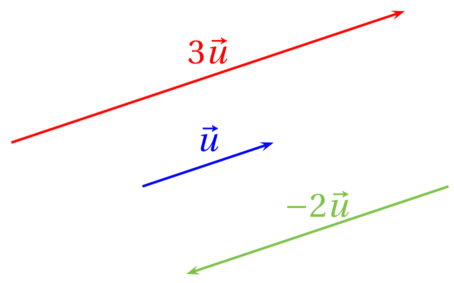
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens
- La norme de $k\vec{u}$ est $k||\vec{u}||$

Si k est **strictement négatif** :

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens opposés
- La norme de $k\vec{u}$ est $-k||\vec{u}||$

Si k est **nul** : $k\vec{u} = 0\vec{u}$ est le vecteur nul

Exemple



Vecteurs colinéaires

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou un réel k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$

Remarques

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction (mais ils peuvent avoir des sens opposés)
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. En effet $\overrightarrow{0} = 0\vec{u}$

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et tous réels k et k' :

- $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $\left(k+k'\right)\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\left(k'\vec{u}\right) = \left(kk'\right)\vec{u}$

Exemple

$$2\left(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{AB}+2\left(3\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$$