Vecteurs et coordonnées

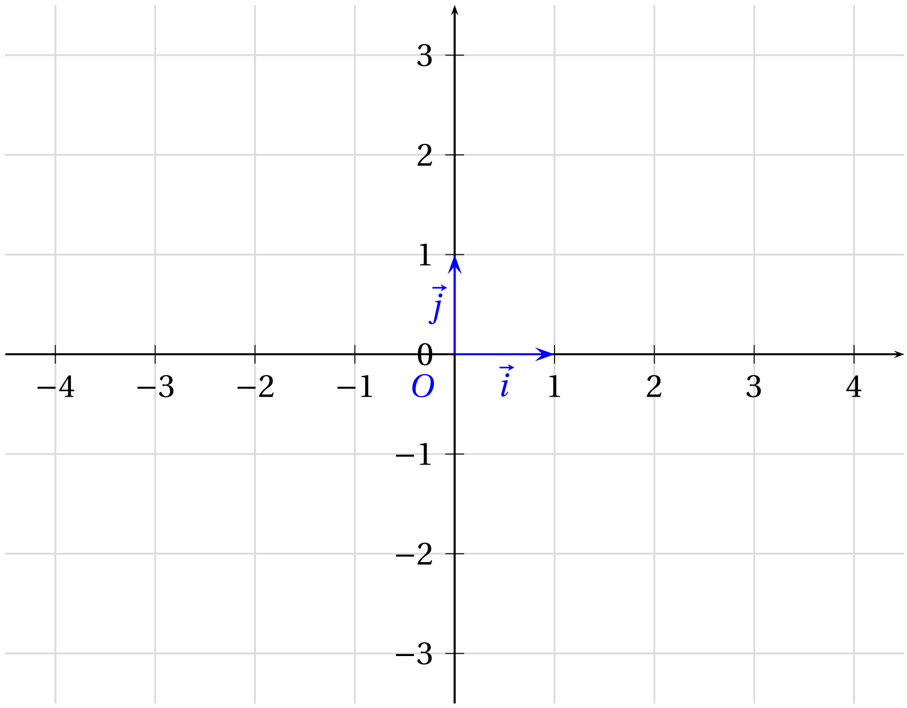
Définitions

Un **repère** du plan est déterminé par un point quelconque O, appelé **origine** du repère, et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.

Définitions

On dit que le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est :

- **orthogonal** : si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux
- **orthonormé** ou **orthonormal** : si le repère est orthogonal et si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même norme.



Repère orthonormé

Définitions

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan.

On dit que M a pour **coordonnées** $(x;y)$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

On dit que $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ si et seulement si :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

Par la suite, on considère que le plan P est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **égaux** si et seulement si ils ont les **mêmes coordonnées**.

Propriété

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple

Soient $A\left(1;1\right), B\left(4;2\right), C\left(5;0\right), D\left(2;-1\right)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ sont $\begin{pmatrix} 5-2 \\ 0-\left(-1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme. (voir Généralités sur les vecteurs)

Propriétés

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Propriété

Colinéarité

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si:

$xy'-yx' = 0$

Propriété

Milieu d'un segment

Si $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$, le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées :

$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

Propriété

Norme et distance

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors :

$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

On en déduit si $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$:

$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

Exemple

Soient $A\left(1; 0\right), B\left(3; 1\right), C\left(0; 2\right)$.

Que peut-on dire du triangle ABC ?

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Donc $AB = AC$

De plus :

$$AB^2 + AC^2 = 5 + 5 = 10$$

$$BC^2 = 10$$

Le triangle ABC est donc rectangle en A (réciproque du théorème de Pythagore) et isocèle.