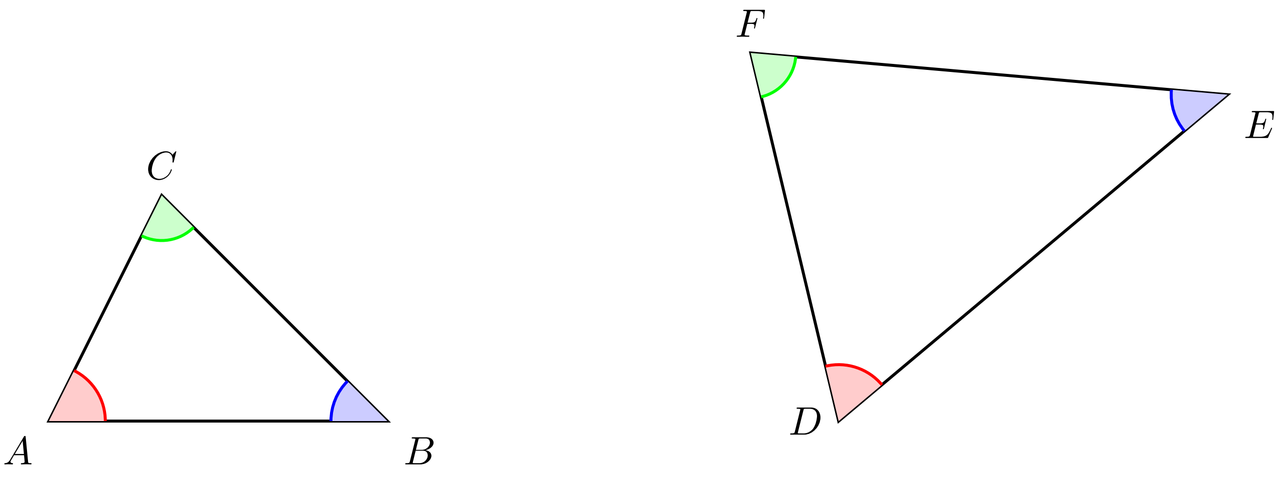
Triangles semblables

La notion de triangles semblables est intuitivement liée à celle de **forme**. Deux figures sont semblables si elles ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille. On peut passer de l'une à l'autre par un **agrandissement** ou une **réduction** (zoom).

1. Définition et angles

Définition

Deux triangles sont dits **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.



Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux : $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ et $\widehat{C} = \widehat{F}$.

Règle des deux angles

La somme des angles d'un triangle étant toujours égale à 180°, il suffit que deux triangles aient **deux paires d'angles de même mesure** pour qu'ils soient semblables. La troisième paire est alors nécessairement égale.

Vocabulaire : « Homologues »

C'est le point clé pour éviter les erreurs.

- Les sommets où se trouvent les angles égaux sont appelés **sommets homologues**.
- Les côtés opposés aux angles égaux sont appelés **côtés homologues**.

Exemple : Si $\widehat{A} = \widehat{D}$, alors le côté $[BC]$ (opposé à A) est homologue au côté $[EF]$ (opposé à D).

2. Longueurs et proportionnalité

Propriété fondamentale

Si deux triangles sont semblables, alors les **longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles**.

Exemple

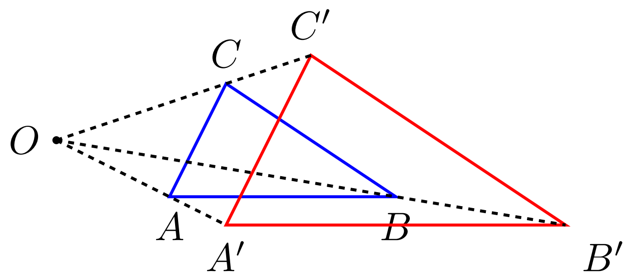
Si ABC et DEF sont semblables avec les correspondances de sommets $(A \leftrightarrow D), (B \leftrightarrow E), (C \leftrightarrow F)$, alors on a l'égalité des rapports :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$$

- Le nombre k est le **coefficient de similitude**.
- Si $k > 1$: C'est un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$: C'est une **réduction**.

Lien avec l'homothétie

L'image d'un triangle par une homothétie de rapport k est un triangle semblable au triangle initial.



Triangles homothétiques donc semblables.

3. Méthodes et applications

Démontrer que deux triangles sont semblables (avec les 3 longueurs)

Énoncé :
Soit deux triangles ABC et DEF définis par les longueurs de leurs côtés :

- Triangle ABC : $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$.
- Triangle DEF : $DE = 6$, $EF = 7.5$, $DF = 9$.

Les triangles ABC et DEF sont-ils semblables ?

Résolution :

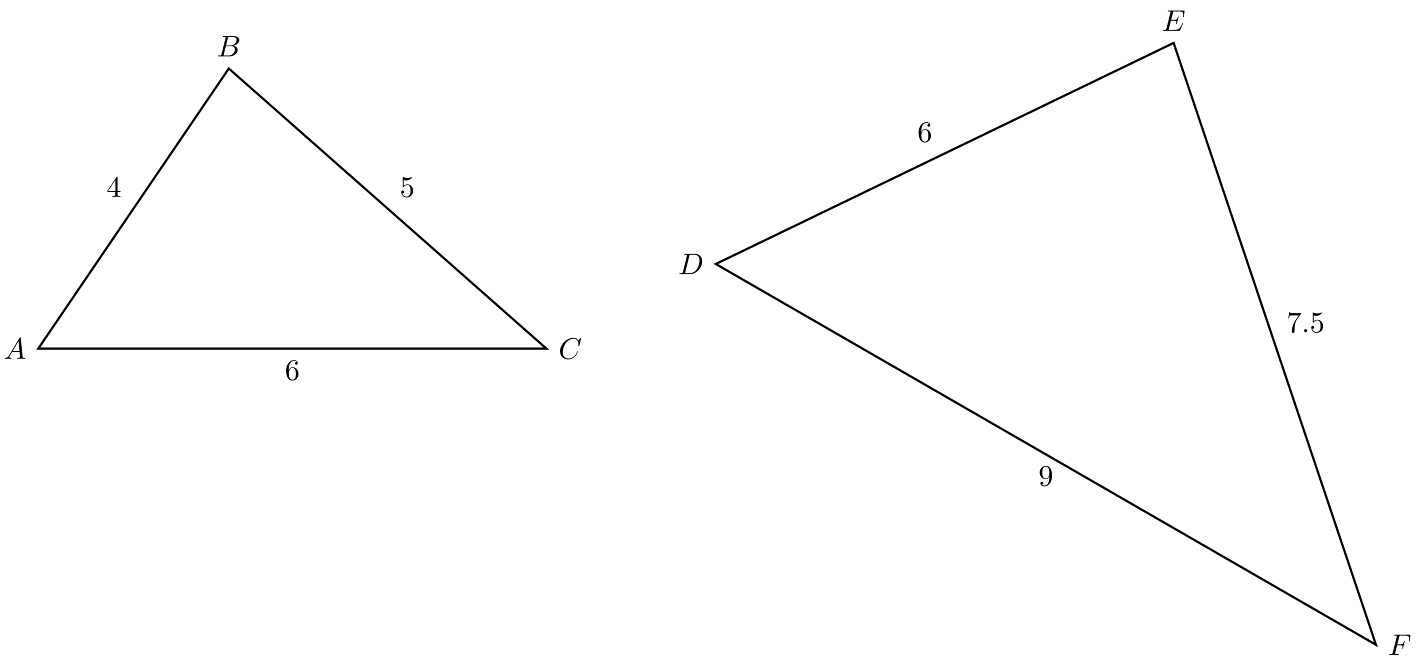
1. Ordonner les longueurs : On classe les côtés par ordre croissant pour chaque triangle afin d'identifier les homologues potentiels.

- Triangle ABC : 4 (petit), 5 (moyen), 6 (grand).
- Triangle DEF : 6 (petit), 7.5 (moyen), 9 (grand).

2. **Calculer les rapports** : On divise les longueurs du second par celles du premier (ou l'inverse).

- $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{6}{4} = 1.5$
- $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{7.5}{5} = 1.5$
- $\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{9}{6} = 1.5$

3. **Conclusion** : Les trois rapports sont égaux, donc les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
Les triangles ABC et DEF sont **semblables**.



Les triangles ABC et DEF ont des côtés proportionnels.

Calculer un rapport de réduction (Configuration triangle rectangle)

Énoncé : Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
On donne les longueurs entières suivantes : $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.

1. Justifier que les triangles ABC et HAC sont semblables.

2. Calculer le coefficient de réduction k permettant de passer du triangle ABC au triangle HAC.

Résolution :

1. Similitude :

- Les triangles ABC et HAC ont l'angle $\widehat{C}$ en commun.
- Ils ont tous deux un angle droit ($\widehat{A}$ pour ABC, $\widehat{H}$ pour HAC).
- Ayant deux angles égaux, ils sont semblables.

2. **Identifier les côtés homologues** :

- On s'intéresse aux hypoténuses, car ce sont les côtés les plus faciles à identifier sans erreur.
- Hypoténuse de ABC (grand triangle) : c'est le côté $[BC]$.
- Hypoténuse de HAC (petit triangle) : c'est le côté $[AC]$ (car opposé à l'angle droit $\widehat{H}$).

3. **Calculs** :

- On calcule d'abord BC avec le théorème de Pythagore dans ABC :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}.$$

- Le coefficient k est le rapport d'une longueur du triangle image (HAC) par la longueur homologue du triangle initial (ABC) :

$$k = \frac{\text{Hypoténuse de } HAC}{\text{Hypoténuse de } ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10}$$

4. Conclusion :

Le coefficient de réduction est $k = 0.6$.