

Probabilités en Seconde

1. Expérience aléatoire

Définitions

Une expérience **aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle **l'univers** de l'expérience.

On le note en général Ω .

Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω .

Chacun des résultats possibles s'appelle une **éventualité** (ou un **événement élémentaire** ou une **issue**).

On appelle **événement** tout sous ensemble de Ω .

Un événement est donc constitué de zéro, une ou plusieurs éventualités.

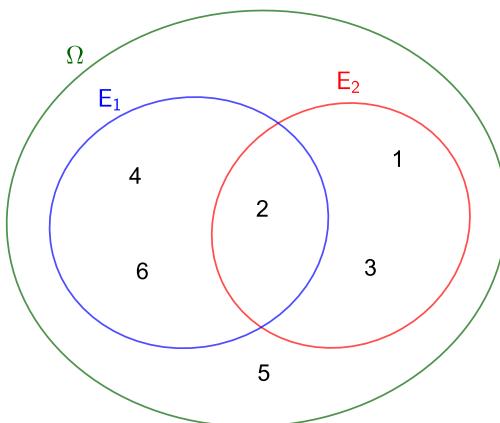
Exemples

Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

- L'ensemble $E_1 = \{2; 4; 6\}$ est un événement. En français, cet événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est un nombre pair* »
- L'ensemble $E_2 = \{1; 2; 3\}$ est un autre événement. Ce second événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est strictement inférieur à 4* »

Ces événements peuvent être représentés par un diagramme de Venn :



Définition

- **l'événement impossible** est la partie vide, noté \emptyset , lorsque aucune issue ne le réalise.
- **l'événement certain** est Ω , lorsque toutes les issues le réalisent.
- **l'événement contraire** de A noté \bar{A} est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A .
- l'événement $A \cup B$ (lire « A union B » ou « A ou B ») est constitué des éventualités qui appartiennent soit à A , soit à B , soit aux deux ensembles.
- l'événement $A \cap B$ (lire « A inter B » ou « A et B ») est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B .

Exemple

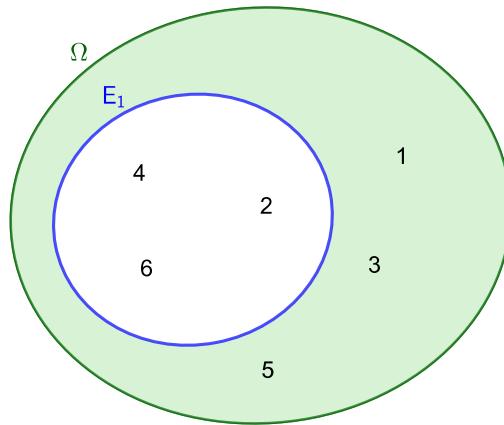
On reprend l'exemple précédent avec :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

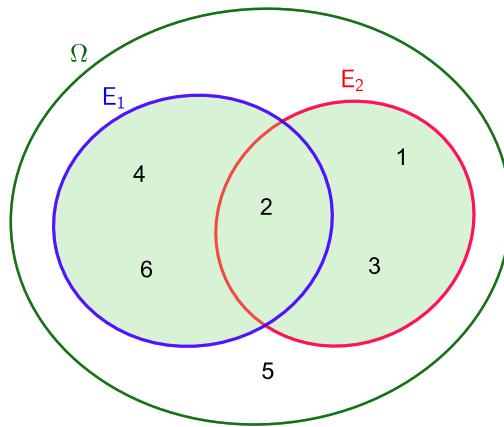
$$E_1 = \{2; 4; 6\}$$

$$E_2 = \{1; 2; 3\}$$

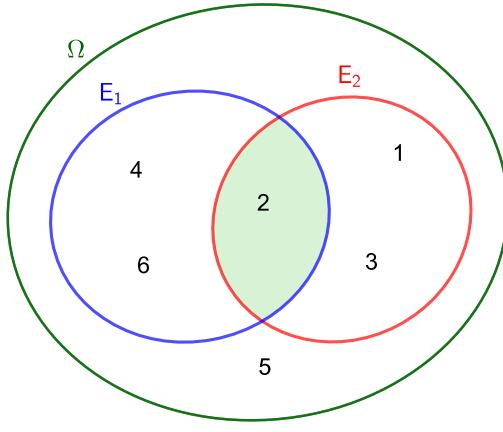
- L'événement « obtenir un nombre supérieur à 7 » est l' événement impossible.
- L'événement « obtenir un nombre entier » est l' événement certain.
- $\overline{E}_1 = \{1; 3; 5\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est un nombre impair » :



- $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 6\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **ou** strictement inférieur à 4 » :



- $E_1 \cap E_2 = \{2\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **et** strictement inférieur à 4 » :



Définition

On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

Deux événements sont incompatibles lorsqu'aucun événement ne les réalise simultanément.

Remarque

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements peuvent être incompatibles sans être contraires.

Exemple

« Obtenir un chiffre inférieur à 2 » et « obtenir un chiffre supérieur à 4 » sont deux événements incompatibles.

2. Probabilités

Définition

La probabilité d'un événement élémentaire est un nombre réel tel que:

- Ce nombre est compris entre 0 et 1
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers vaut 1

Propriétés

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\Omega) = 1$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemple

On lance un dé à six faces. On note S l'événement : « obtenir un 6. On suppose que le dé est bien équilibré et que la probabilité de S est de $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un résultat différent de 6 est alors :

$$p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Théorème

Quels que soient les événements A et B de Ω :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont **incompatibles** :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Définition

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

Lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemple

Un lancer d'un dé non truqué est une situation d'équiprobabilité.

Propriétés

On suppose que l'univers est composé de n événements élémentaires

- Dans le cas d'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a pour probabilité : $\frac{1}{n}$
- Si un événement A de Ω est composé de m événements élémentaires, alors $P(A) = \frac{m}{n}$.

Exemple

On reprend l'exemple du lancer d'un dé avec E_1 : « le résultat du dé est un nombre pair »

$$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$