Pourcentages

1. Part en pourcentage

Définition

Soit E un ensemble fini (que l'on appellera **ensemble de référence**) et F une partie de l'ensemble E. La **part en pourcentage** de F par rapport à E est le nombre :

$$t\% = \frac{t}{100} = \frac{card\,(F)}{card\,(E)}$$

où $card\,(E)$ (cardinal de E) désigne le nombre d'éléments de E et $card\,(F)$ le nombre d'éléments de F.

On dit également que F représente $t\%$ de E.

Remarque

- 5%, $\dfrac{5}{100}$ et $0,05$ sont trois écritures différentes du **même nombre** (pourcentage, fraction, écriture décimale).
- On est en présence d'une situation de proportionnalité que l'on peut représenter par le tableau suivant :

t	nombre d'éléments de F
100	nombre d'éléments de E

- Ceci peut également s'écrire : nombre d'éléments de $F = \dfrac{t}{100} \times$ nombre d'élements de E.

Cette dernière égalité permet de calculer le nombre d'éléments de F connaissant sa part en pourcentage par rapport à E

Exemple

- Dans une classe de 25 élèves qui compte 15 garçons le pourcentage de garçons est :

  $$\frac{15}{25} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%$$

- 16% de 75€ font : $\frac{16}{100} \times 75 = 12$€

Propriété

Pourcentages de pourcentages Soit 3 ensembles E, F, G tels que $G \subset F \subset E$.

Si G représente $t_1\%$ de F et si F représente $t_2\%$ de E, la part en pourcentage de G par rapport à E est :

$$\frac{t}{100} = \frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100}$$

Exemple

Dans un lycée de 800 élèves :

- 25 % des élèves sont en Seconde;
- 45 % des élèves de Seconde sont des filles.

La part des filles de Seconde dans le lycée est :

$$\frac{t}{100} = \frac{25}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{1125}{10000} = \frac{11,25}{100} = 11,25\%$$

Le nombre de filles en Seconde est $\frac{11,25}{100} \times 800 = 90$

2. Pourcentages d'évolution

Définition

On considère une quantité passant d'une valeur V_0 à une valeur V_1.

Le pourcentage d'évolution de cette quantité est le nombre

$$\frac{t}{100} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Remarque

Le pourcentage d'évolution est **positif** dans le cas d'une **augmentation** et **négatif** dans le cas d'une **diminution**.

Exemple

Le prix d'un article passe de 80€ à 76€. Le pourcentage d'évolution est :

$$\frac{t}{100} = \frac{76 - 80}{80} = -\frac{4}{80} = -0,05 = -5\%$$

Le prix de l'article a diminué de 5%

Définition

On considère une quantité passant d'une valeur V_0 à une valeur V_1.

Le **coefficient multiplicateur** est le nombre par lequel il faut multiplier V_0 pour obtenir V_1 :

$V_1 = CM \times V_0$

Remarque

- On a donc $CM = \dfrac{V_1}{V_0}$

- Le coefficient multiplicateur est **supérieur à 1** dans le cas d'une **augmentation** et **inférieur à 1** dans le cas d'une **diminution**.
- La fonction qui à l'ancienne valeur associe la nouvelle valeur est : $x \mapsto CM \times x$

  C'est une **fonction linéaire** de coefficient directeur CM

Propriété

Le coefficient multiplicateur s'exprime en fonction du pourcentage d'évolution par:

$$CM = 1 + \frac{t}{100}$$

(où t est positif en cas d'augmentation, négatif en cas de diminution)

Remarque

- On a donc : $V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_0$.
- Dans le cas d'une diminution de 5%, par exemple, on pourra au choix considérer que :

  $CM = 1 + \frac{t}{100}$ avec $t = -5$

  ou

  $CM = 1 - \frac{t}{100}$ avec $t = 5$

  Dans les deux raisonnements, on obtient évidemment le même coefficient multiplicateur $0,95$.
- Connaissant le coefficient multiplicateur, on a facilement le pourcentage d'évolution grâce à la relation : $\frac{t}{100} = CM - 1$
- Le tableau ci-dessous résume les différents cas :

	Prendre $t\%$ de x	Augmenter x de $t\%$	Diminuer x de $t\%$
Calculs à effectuer	Multiplier x par $\frac{t}{100}$	Multiplier x par $1+\frac{t}{100}$	Multiplier x par $1–\frac{t}{100}$
Fonction linéaire	$x \mapsto \frac{t}{100} \times x$	$x \mapsto \left(1+\frac{t}{100}\right) \times x$	$x \mapsto \left(1–\frac{t}{100}\right) \times x$

Exemple

	Prendre 25% de x	Augmenter x de 25%	Diminuer x de 25%
Calculs à effectuer	Multiplier x par $\frac{25}{100}$	Multiplier x par $1,25$	Multiplier x par $0,75$
Fonction linéaire	$x \mapsto 0,25 \times x$	$x \mapsto 1,25 \times x$	$x \mapsto 0,75 \times x$
Exemples	Prendre 25% de 200	Augmenter 50 de 25%	Diminuer 50 de 25%
Résultat	$0,25 \times 200 = 50$	$1,25 \times 50 = 62,5$	$0,75 \times 50 = 37,5$

Propriété (Évolutions successives)

Lors d'évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est égal au **produit** des coefficients multiplicateurs de chaque évolution

Exemple

Le prix d'un objet augmente de 10% puis diminue de 10%.

Le coefficient multiplicateur global est :

$$CM = \left(1+\frac{10}{100}\right)\left(1–\frac{10}{100}\right) = 0,99$$

Si t désigne le pourcentage d'évolution global en %, on a donc :

$1+\frac{t}{100}=0,99$

$\frac{t}{100}=0,99–1=–0,01=-\frac{1}{100}$

Le prix de l'objet a globalement **diminué** de 1%.

Remarque

- **Une hausse de $t\%$ ne « compense » pas une baisse de $t\%$**. C'est dû au fait que les deux pourcentages ne portent pas sur le même montant.

  En effet, si un objet coûtant 100 euros subit une augmentation de 10% son prix passera à $110€$ (les 10% ont été calculé par rapport à $100€$).

  Si son prix subit ensuite une diminution de 10%, le montant de la baisse sera calculé par rapport au prix de $110€$ et non plus de $100€$. La baisse sera donc de $11€$ et non $10€$.

- En cas d'évolution successives,**les pourcentages d'évolutions ne s'ajoutent (ni ne soustraient) jamais**.

Définition et propriété (Taux d'évolution réciproque)

Si le taux d'évolution $t\%$ fait passer de V_0 à V_1, on appelle taux d'évolution réciproque $t'\%$, le taux d'évolution qui fait passer de V_1 à V_0.

On a alors la relation suivante :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$$

Exemple

Le prix d'un article augmente de 60%. Pour qu'il revienne à son prix de départ, il faut qu'ensuite il varie de $t'\%$ tel que :

$\left(1+\frac{60}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$

$$1,6 \times \left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 1$$

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1,6}$$

$$1 + \frac{t'}{100} = 0,625$$

$$\frac{t'}{100} = -0,375$$

$$t' = -37,5$$

Il faut donc que le prix diminue de 37,5% pour compenser la hausse de 60%.

Pourcentages : Les 5 questions incontournables

1. Comment calculer $t\%$ d'un nombre ou trouver un pourcentage ?

> C'est la base du chapitre. Il y a deux situations :

- **Prendre un pourcentage (calculer une part) :** On multiplie le total par $\frac{t}{100}$.
- *Exemple :* 20% de 500€ se calcule par $500 \times 0,20 = 100€$.
- **Trouver un pourcentage (calculer un taux) :** On divise la partie par le total, et on met le résultat sous forme de pourcentage.
- *Exemple :* 5 élèves sur 25 représente une proportion de $\frac{5}{25} = 0,20 = \frac{20}{100} = 20\%$.

> → **Voir la fiche méthode : Calculer une proportion ou un pourcentage**

2. Comment calculer le taux d'évolution (augmentation ou diminution)

entre deux valeurs ?

Pour savoir de quel pourcentage une valeur a augmenté ou diminué, on utilise la formule du taux d'évolution : $\frac{V_{arrivée} - V_{départ}}{V_{départ}}$.

- *Exemple :* Une note passe de 10 à 12.
- Calcul : $\frac{12 - 10}{10} = \frac{2}{10} = 0,20$.
- On multiplie par 100 pour lire le pourcentage : C'est une augmentation de 20%.

→ **Voir la fiche méthode : Calculer un taux d'évolution**

3. Comment calculer facilement un prix après une augmentation ou une réduction ?

Pour calculer un prix final, le plus rapide est d'utiliser le **Coefficient Multiplicateur (CM)**.

- Pour une **hausse** de 20% : On multiplie le prix par $1 + \frac{20}{100} = 1,20$ (car $CM = 1 + \frac{t}{100}$).
- Pour une **baisse** (solde) de 20% : On multiplie le prix par $1 - \frac{20}{100} = 0,80$ (car $CM = 1 - \frac{t}{100}$).
- *Exemple :* Un pull à 50€ soldé à -20% coûte $50 \times 0,80 = 40€$.

→ **Voir la fiche méthode : Calculer une valeur finale**

4. Comment retrouver le prix initial (de départ) avant une augmentation ou une remise ?

C'est une erreur classique : **il ne faut jamais soustraire le pourcentage** au prix final. Pour revenir en arrière (taux réciproque), il faut **diviser le prix final par le coefficient multiplicateur**.

- *Exemple :* Si un article coûte 120€ après une hausse de 20%, on ne fait pas $120–20\%$. On divise 120 par $1,20$, ce qui donne un prix initial de 100€.

→ **Voir la fiche méthode : Retrouver une valeur initiale**

5. Peut-on additionner les pourcentages lors d'évolutions successives ?

Non, les pourcentages ne s'additionnent jamais. Si un prix augmente de 10% puis encore de 10%, l'augmentation totale n'est pas de 20%. Il faut multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux : $1,10 \times 1,10 = 1,21$. L'augmentation globale est donc de 21%. Cela explique pourquoi une hausse de 50% suivie d'une baisse de 50% ne permet pas de revenir au prix de départ.

→ **Voir la fiche méthode : Calculer une évolution globale**