Ensembles de nombres – Intervalles – Valeurs absolues

I – Les ensembles de nombres

Définition

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \cdots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

Remarque

On emploie le signe $\in$ pour indiquer qu'un nombre appartient à un ensemble. On écrira par exemple: $2 \in \mathbb{N}$ et $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

Définition

$\mathbb{Z} = \{\cdots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.

Définition

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. Les nombres décimaux peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (1; 10; 100; 1 000; ...).
Ils peuvent aussi s'écrire sous forme décimale dont le nombre de chiffres après la virgule est finie.

Remarque

- « *fini* » signifie ici « qui n'est pas infini ».
- Les calculatrices les plus simples ne manipulent que des nombres décimaux pour effectuer les calculs. Certaines permettent des opérations sur les fractions. Quelques modèles plus avancés (effectuant du « calcul formel ») peuvent également effectuer des calculs avec des nombres irrationnels.

Définition

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers relatifs.

Définition

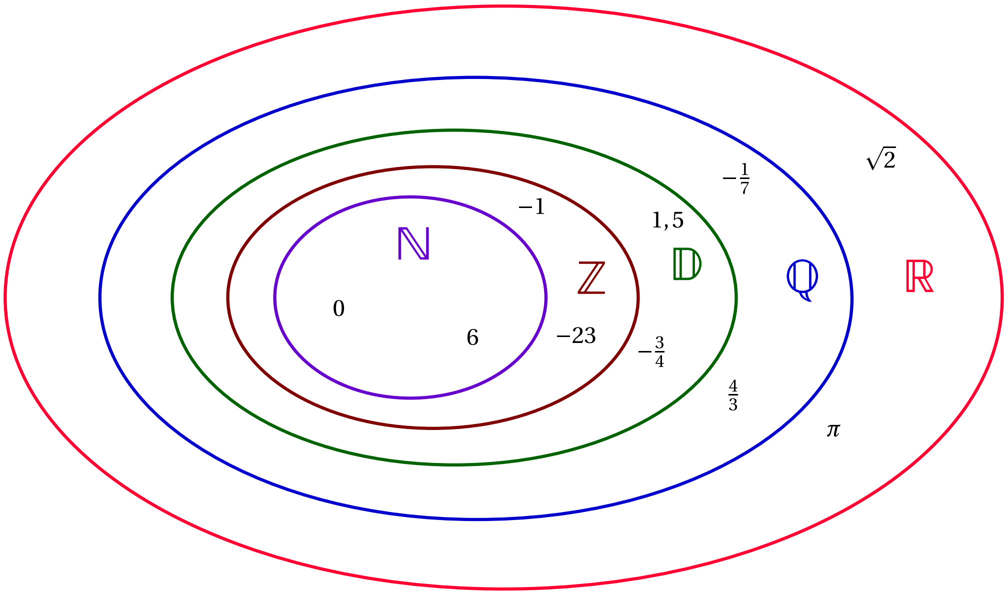
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**. Les nombres réels sont tous les nombres connus (en Seconde...).

Remarque

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels (comme π ou $\sqrt{2}$) sont appelés des nombres **irrationnels**.

Propriété

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Remarque

- Le symbole $\subset$ se lit « *inclus dans* ».
- La proposition précédente signifie que tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont eux-même des nombres décimaux qui sont des nombres rationnels qui sont des nombres réels.
- Un même nombre admet plusieurs écritures différentes. Par exemple le nombre 2 peut aussi s'écrire 2,0 (écriture décimale) $\dfrac{2}{1}$ ou $\dfrac{4}{2}$ etc. (écriture fractionnaire) $\sqrt{4}$ (écriture avec un radical) et même (aussi curieux que cela puisse vous paraitre) 1,999999.... (écriture décimale illimitée).

II – Intervalles

Intervalles bornés

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

- L'intervalle **fermé** $[a\ ;\ b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

- L'intervalle **ouvert** $]a\ ;\ b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.
- L'intervalle $[a\ ;\ b[$ (fermé en a, ouvert en b) est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x < b$.
- L'intervalle $]a\ ;\ b]$ (ouvert en a, fermé en b) est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$.

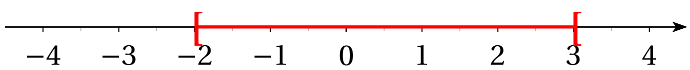
Exemple

Par exemple, l'intervalle $[-2\ ;\ 3[$ est constitué des nombres réels qui sont à la fois supérieur ou égal à -2 et strictement inférieur à 3.

On pourra, par exemple, écrire :

- $-3 \notin [-2\ ;\ 3[$
- $-2 \in [-2\ ;\ 3[$
- $0 \in [-2\ ;\ 3[$
- $3 \notin [-2\ ;\ 3[$
- $4 \notin [-2\ ;\ 3[$

On peut représenter l'intervalle $[-2\ ;\ 3[$ de la façon suivante :



Intervalles non bornés

Définition

Soit a un nombre réel.

- L'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.
- L'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty\ ;\ a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant a$.

- L'intervalle $]-\infty\ ;\ a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.

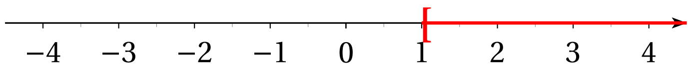
Remarque

En $+\infty$ et en $-\infty$, le crochet est toujours **ouvert**.

Exemple

- $0 \notin [1\ ;\ +\infty[$
- $1 \in [1\ ;\ +\infty[$
- $100 \in [1\ ;\ +\infty[$

On représente l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ ainsi :



Union et intersection

Définition

Soient I et J deux intervalles.

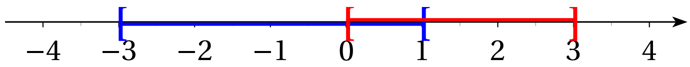
- L'**intersection** de I et de J notée $I \cap J$ (lire « I inter J ») est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à I **et** à J.
- L'**union** (ou la **réunion** de I et de J notée $I \cup J$ (lire « I union J ») est l'ensemble des nombres appartenant à I **ou** à J **ou** aux deux intervalles.

Remarque

Retenir que l'**intersection** correspond au mot « **et** » et que la **réunion** correspond au mot « **ou** ».

Exemple

Si $I = [-3\ ;\ 1[$ et $J = [0\ ;\ 3]$, I est représenté en bleu et J en rouge sur la figure suivante :



$I \cap J = [0\ ;\ 1[$ et $I \cup J = [-3\ ;\ 3]$

III – Valeurs absolues

Intuitivement, la valeur absolue d'un nombre c'est « le nombre sans son signe. ». Par exemple, la valeur absolue de -5 est 5 et la valeur absolue de $1,12$ est $1,12$.
Toutefois, lors de calculs littéraux, le signe peut être « caché » à l'intérieur de la lettre ; par exemple, on ne peut pas dire que la valeur absolue de $-x$ est égale à x car c'est faux si x est négatif. D'où la définition suivante :

Définition

Soit x un nombre réel
On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel positif ou nul défini par

- $|x|$ = x si x est positif ou nul,
- $|x|$ = $-x$ si x est négatif ou nul.

Exemple

- $|-1| = -(-1) = 1$
- $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ car $\sqrt{2} > 1$ donc $\sqrt{2}-1$ est positif.

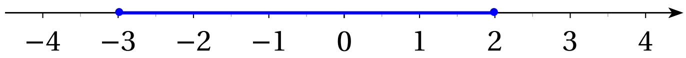
Propriété

La distance entre les nombres réels x et y est égale à $|y-x|$ (ou aussi à $|x-y|$).

En particulier, $|x|$ est la distance de x à 0.

Exemple

Les nombres -3 et 2 sont représentés sur l'axe ci-dessous :



La distance entre -3 et 2 est égale à :

$$|-3-2| = |-5| = 5$$

La distance entre -3 et 0 est égale à :

$$|-3| = 3$$

Ensembles et Intervalles : Les 5 questions incontournables

1. Comment déterminer le plus petit ensemble de nombres usuels ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) auquel appartient un nombre ?

> Il est **indispensable de simplifier l'écriture du nombre** au maximum avant de conclure.

- Ne vous fiez pas à l'apparence : une fraction peut cacher un nombre entier (ex: $\dfrac{10}{2} = 5 \in \mathbb{N}$).
- Un nombre peut appartenir à plusieurs ensembles, mais on cherche toujours le « plus petit » (celui qui est le plus restrictif).

> → **Voir la fiche méthode : Comment simplifier un nombre pour identifier son ensemble**

2. Comment traduire une inégalité en un intervalle ?

La conversion dépend essentiellement du sens des crochets, qui est dicté par le signe de l'inégalité :

- **Inégalité stricte ($<$ ou $>$) :** Le crochet est **ouvert** (tourné vers l'extérieur). La valeur n'est pas comprise.
- **Inégalité large ($\leqslant$ ou $\geqslant$) :** Le crochet est **fermé** (tourné vers l'intérieur). La valeur est comprise.

Exemple : $x \geqslant 3$ devient l'intervalle $[3; +\infty[$.

→ **Voir la fiche méthode : Passer des inégalités aux intervalles sans erreur**

3. Comment représenter l'intersection ($\cap$) ou l'union ($\cup$) de deux intervalles ?

La méthode visuelle est la plus sûre : dessinez une droite graduée et coloriez chaque intervalle d'une couleur différente.

- **Intersection ($\cap$) :** C'est la zone où les deux couleurs **se superposent** (ce qui est commun aux deux).
- **Union ($\cup$) :** C'est la zone recouverte par **au moins une** des couleurs (tout ce qui a été colorié).

→ **Voir la fiche méthode : Réussir ses opérations sur les intervalles (Union et Intersection)**

4. Comment résoudre une équation de type $|x – a| = r$?

Pensez « distance » ! Géométriquement, $|x – a|$ représente la distance entre le point x et le point a.

On cherche donc les points situés exactement à une distance r du centre a.

- Il y a généralement deux solutions : une à droite ($a+r$) et une à gauche ($a–r$).

→ **Voir la fiche méthode : Résoudre des équations avec valeur absolue par la géométrie**

5. Comment résoudre une inéquation de type $|x–a| \leqslant r$?

Cela revient à chercher tous les points dont la distance au centre a est plus petite que le rayon r.

- **Graphiquement :** C'est tout le segment centré en a et de rayon r.
- **Résultat :** Cela correspond à l'intervalle $[a-r; a+r]$.

→ **Voir la fiche méthode : Traduire une inéquation de valeur absolue en intervalle**