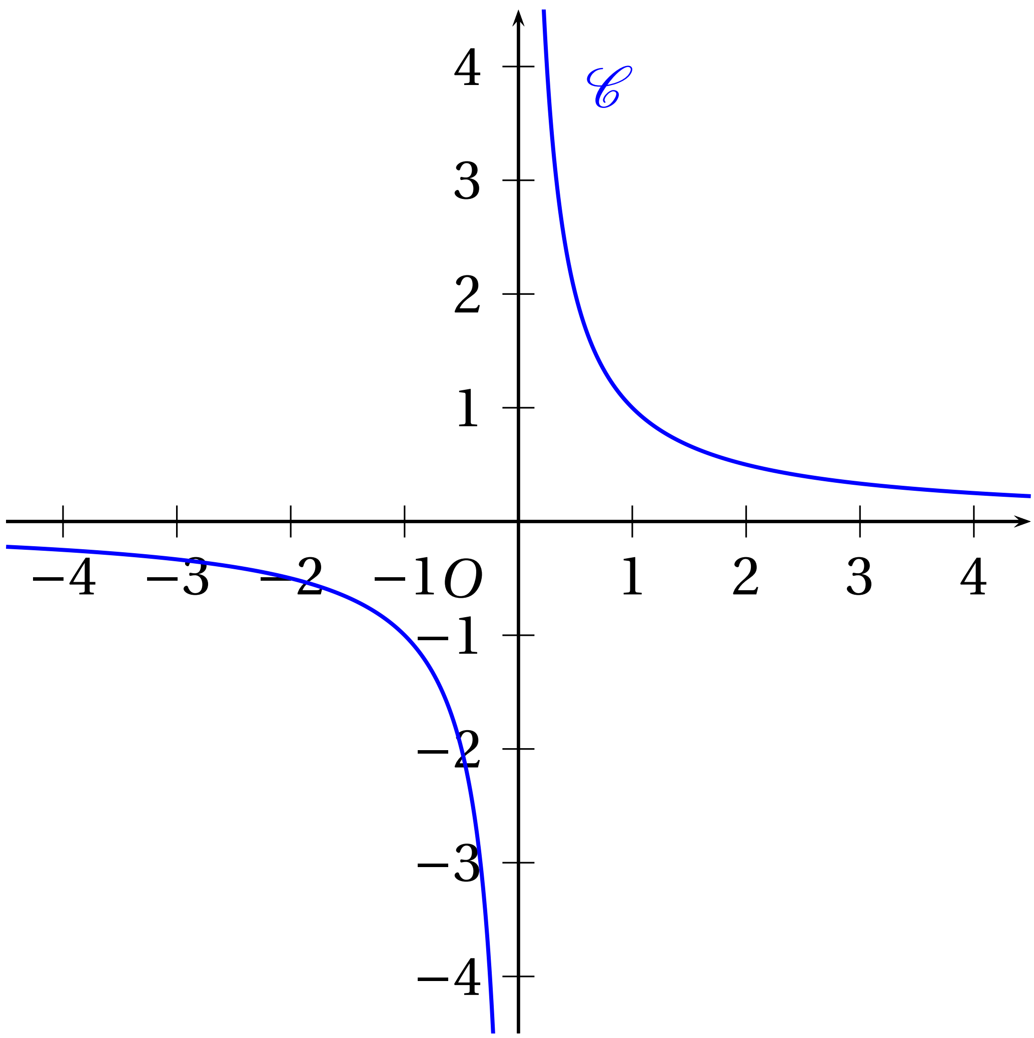
# La fonction inverse et les fonctions homographiques

## 1. La fonction inverse

**Définition**

La fonction **inverse** est la fonction définie sur $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ par : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est une **hyperbole**.



L'hyperbole représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

> **Théorème**
>
> La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

> **Théorème**
>
> La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |

Tableau de variation de la fonction « inverse »

### Exemple d'application

On veut comparer les nombres $\dfrac{1}{\pi}$ et $\dfrac{1}{3}$.

On sait que $\pi > 3$

Comme les nombres $3$ et $\pi$ sont strictement positifs et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ on en déduit que $\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3}$

# 2. Fonctions homographiques

### Définition

Soient $a, b, c, d$ quatre réels avec $c \neq 0$ et $ad–bc \neq 0$.

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par :

$$f\left(x\right) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

s'appelle une **fonction homographique**.

La courbe représentative d'une fonction homographique est une **hyperbole**.

### Remarques

- La valeur « interdite » $-\frac{d}{c}$ est celle qui annule le dénominateur.
- Si $ad–bc = 0$, la fraction se simplifie et dans ce cas la fonction $f$ est constante sur son ensemble de définition. Par exemple $f\left(x\right) = \frac{2x+1}{4x+2} = \frac{2x+1}{2\times\left(2x+1\right)} = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

### Exemple

La fonction $f$ telle que :

$$f\left(x\right) = \frac{3x+2}{x+1}$$

est définie pour $x+1 \neq 0$ c'est à dire $x \neq -1$.

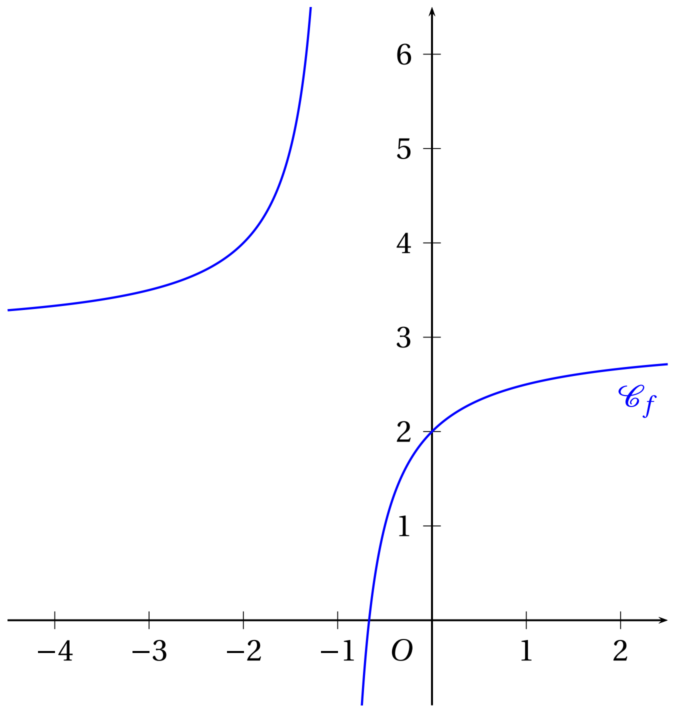
Son ensemble de définition est donc :

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-1\right\}$( ou $\mathscr{D}_f = \left]-\infty; -1\right[ \cup \left]-1; +\infty\right[$)

Elle est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -1\right[$ et $\left]-1; +\infty\right[$ (pour cet exemple ; ce n'est pas le cas pour toutes les fonctions homographiques !).

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ |

Tableau de variations de $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{3x+2}{x+1}$




Courbe représentative de $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{3x+2}{x+1}$