Transformations et homothéties

Ce chapitre introduit une nouvelle transformation du plan : l'homothétie. Elle complète les transformations vues au cycle 4 (symétries, translation, rotation) en permettant de traiter les agrandissements et réductions.

1. Rappel : Les transformations du plan

Avant d'aborder les homothéties, il est important de distinguer les transformations appelées isométries, qui conservent les longueurs et les formes.

Les isométries (Rappels 5eme/4eme)

- **Symétrie axiale** : Pliage le long d'une droite (l'axe).
- **Symétrie centrale** : Demi-tour autour d'un point (le centre).
- **Translation** : Glissement selon une direction, un sens et une longueur.
- **Rotation** : Pivotement autour d'un centre, d'un angle donné et dans un sens donné.

Ces quatre transformations conservent les **longueurs** (les figures ne sont pas déformées) et les **aires**. L'image d'une figure est une figure superposable.

2. Les homothéties

Une homothétie est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire une figure. Elle ne conserve pas (en général) les longueurs.

A. Définition

Homothétie

Une homothétie est définie par un **centre** O et un **rapport** k (nombre relatif non nul).
Transformer un point M en un point M' par l'homothétie de centre O et de rapport k signifie que :

1. Les points O, M et M' sont **alignés**.

2. La longueur OM' est proportionnelle à la longueur OM : $OM\text{'} = |k| \times OM$.

B. Les différents cas du rapport k

La position de l'image M' dépend du signe de k, et sa taille (agrandissement/réduction) dépend de la valeur de $|k|$.

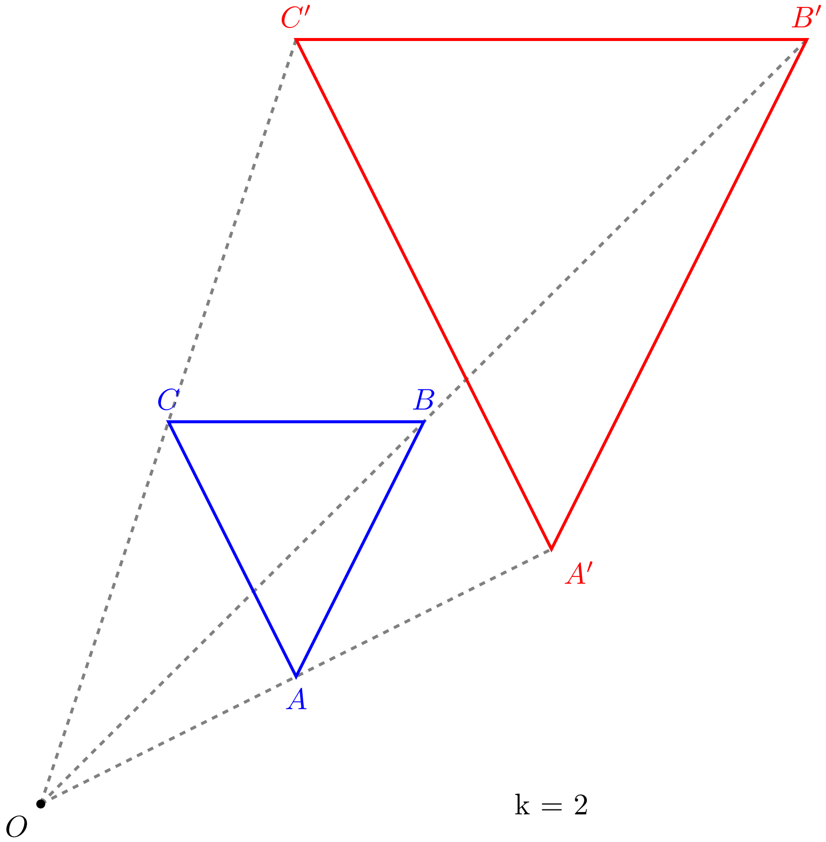
Position et Taille

- **Si** $k > 0$: M' est du même côté que M par rapport à O.
- **Si** $k < 0$: M' est de l'autre côté de O (effet de retournement, comme une symétrie centrale).

- **Si** $|k| > 1$: C'est un **agrandissement**.
- **Si** $|k| < 1$: C'est une **réduction**.

Exemple

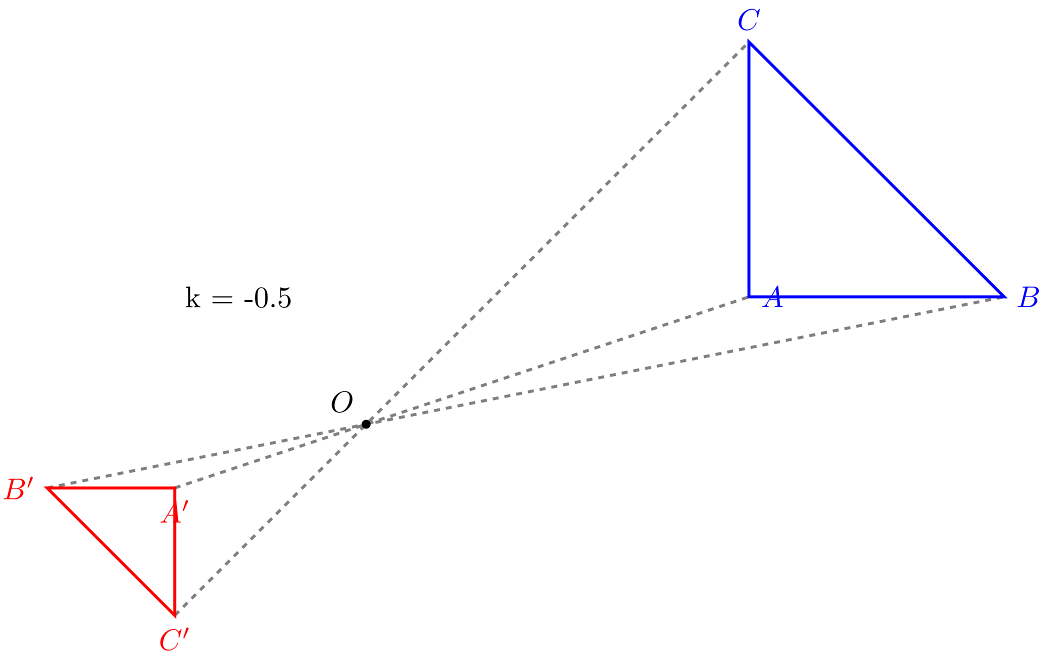
Cas 1 : Rapport positif ($k = 2$). C'est un agrandissement de facteur 2.



Homothétie de centre O *et de rapport* $k = 2$

Exemple

Cas 2 : Rapport négatif ($k = -0.5$). C'est une réduction de facteur 0,5 avec retournement.



Homothétie de centre O *et de rapport* $k = -0,5$

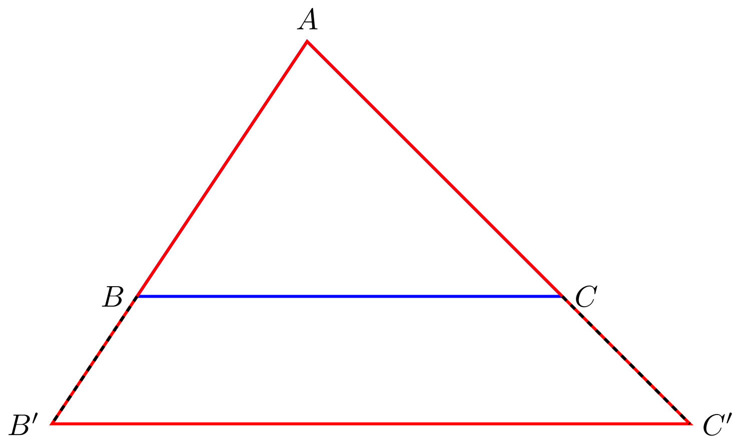
C. Construction et lien avec Thalès

Une configuration de Thalès est une situation d'homothétie.

- La configuration « triangles emboîtés » correspond à un rapport positif.
- La configuration « papillon » correspond à un rapport négatif.

Exemple

Théorème de Thalès et Homothétie
Dans la figure ci-dessous, le triangle $AB'C'$ est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A.
Les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.



Le triangle $AB'C'$ est « homothétique » au triangle ABC

3. Propriétés des homothéties

Les homothéties conservent certaines propriétés géométriques mais modifient les grandeurs.

Propriétés de conservation

L'homothétie conserve :

- L'alignement des points.
- Les **mesures d'angles** (un angle de 30° reste de 30°).

- Le parallélisme (l'image d'une droite est une droite parallèle).

Effet sur les grandeurs

Lors d'un agrandissement ou réduction de rapport k :

1. Les **longueurs** sont multipliées par $|k|$.

2. Les **aires** sont multipliées par k^2 (ou $|k|^2$).

3. Les **volumes** sont multipliés par $|k|^3$.

Exemple

On agrandit un carré de côté 3 cm avec un rapport $k = 2$.

- **Nouveau côté** : $3 \times 2 = 6$ cm.
- **Ancienne aire** : $3^2 = 9$ cm².
- **Nouvelle aire** : $6^2 = 36$ cm².

On vérifie bien que l'aire a été multipliée par $k^2 = 2^2 = 4$ $(9 \times 4 = 36)$.