Fonctions linéaires et affines

1. Fonctions linéaires

Définition

Une fonction **linéaire** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une formule du type : $x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

a s'appelle le **coefficient de la fonction** f.

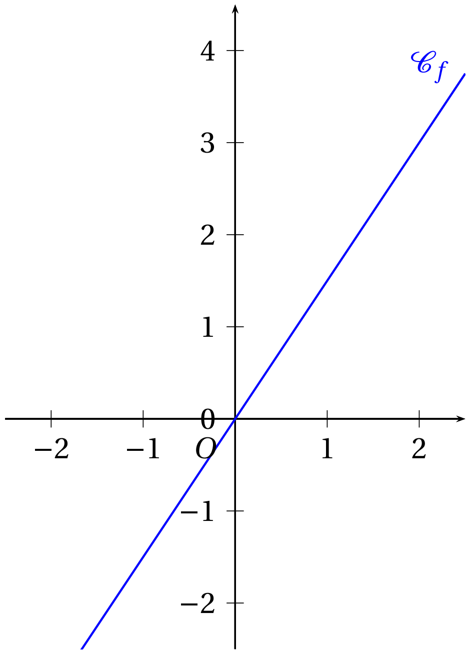
Remarque

La définition ci-dessus indique que si f est une fonction linéaire, les valeurs de $f\left(x\right)$ sont proportionnelles aux valeurs de x, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient a de la fonction f.

Propriété

La courbe représentative d'une fonction linéaire est une **droite qui passe par l'origine** du repère.

Exemple



Représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto \dfrac{3}{2}x$

Propriété

Soit f une fonction linéaire.

Pour tous réels x et x' : $f\left(x+x'\right)=f\left(x\right)+f\left(x'\right)$

Pour tous réels k et x : $f\left(kx\right)=kf\left(x\right)$

2. Fonctions affines

Définition

Une fonction **affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une formule du type :
$x \mapsto ax+b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Remarque

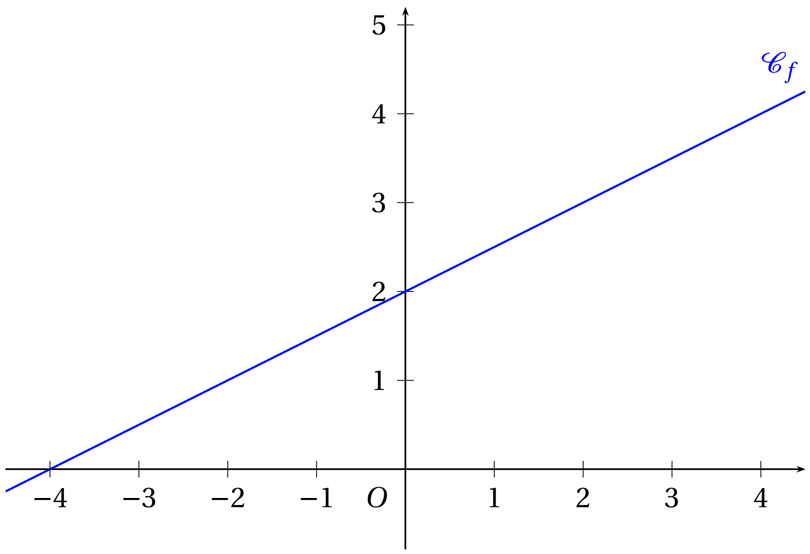
Si $b = 0$, la fonction est linéaire. Les fonctions linéaires sont donc des cas particuliers des fonctions affines.

Propriété

La courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.

a est le **coefficient directeur** de la droite et b son **ordonnée à l'origine**.

Exemple



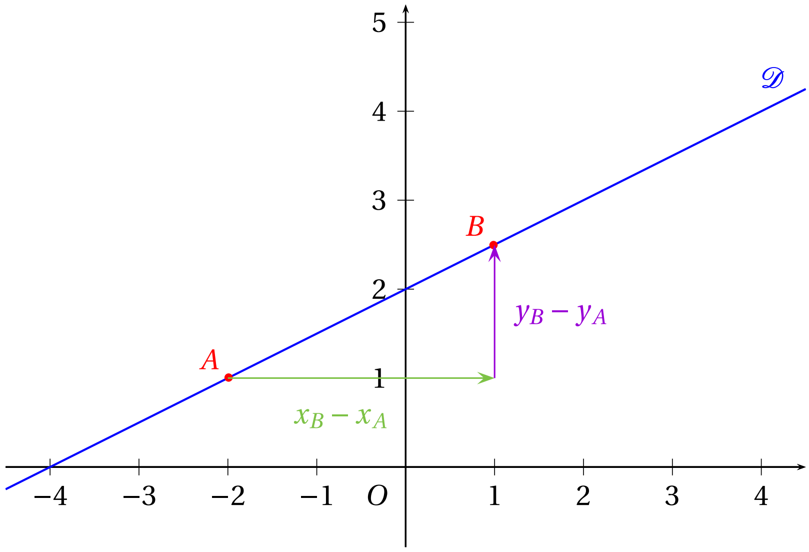
Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 2$

Propriété

Soit f une fonction affine de représentation graphique $\mathscr{D}$ et soient A et B deux points de $\mathscr{D}$.

Le rapport $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ne dépend pas des points A et B choisis et est égal au coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Coefficient directeur de $\mathscr{D}$ *:* $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1,5}{3} = 0,5$

Théorème

Une fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est :

- **strictement croissante** si a est **strictement positif**.
- **strictement décroissante** si a est **strictement négatif**.
- **constante** si a est **nul**.

Démonstration

Démontrons, par exemple, que la fonction $f : x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante si $a < 0$.

Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$

Alors $ax_1 > ax_2$ (on change le sens de l'inégalité car on multiplie par un réel négatif) donc

$ax_1 + b > ax_2 + b$ c'est à dire :

$f(x_1) > f(x_2)$

Le sens de l'inégalité est inversé donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Ce théorème s’applique aussi aux fonctions linéaires puisque les fonctions linéaires sont des fonctions affines particulières.