Fonctions – Généralités

1. Notion de fonction

Définition

Une **fonction** f est un procédé qui à tout nombre réel x d'une partie D de $\mathbb{R}$ associe **un seul** nombre réel y.

- x s'appelle la **variable**.
- y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$
- f est la **fonction** et se note: $f : x \mapsto y = f(x)$.

Remarque

Les procédés permettant d'associer un nombre à un autre nombre peuvent être :

- des formules mathématiques (par exemple : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$)
- une courbe (par exemple : la courbe donnant le cours d'une action en Bourse en fonction du temps)
- un instrument de mesure ou de conversion (par exemple : le compteur d'un taxi qui donne le prix à payer en fonction du trajet parcouru)
- un tableau de valeurs, chaque élément de la seconde ligne étant associé à un élément de la première ligne
- une touche de calculatrice (par exemple: *sin, cos, ln, log*, etc.) qui affiche un résultat dépendant du nombre saisi auparavant

- etc.

Méthode (Calcul d'une image)

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction définie par une formule on remplace x par ce nombre dans l'expression de $f(x)$

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

- Pour calculer l'image de 1 – notée $f(1)$ – on remplace x par 1 dans la formule donnant $f(x)$. On obtient alors :

$$f(1) = \frac{1^2+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

- Pour calculer l'image de -2, on remplace x par (-2) dans cette même formule. Pensez bien à ajouter une parenthèse lorsque x est négatif ou lorsqu'il s'agit d'une expression fractionnaire. On obtient :

$$f(-2) = \frac{(-2)^2+3}{(-2)+1} = \frac{7}{-1} = -7$$

Définition

L'ensemble $\mathscr{D}$ des éléments x de $\mathbb{R}$ qui possèdent une image par f s'appelle l'**ensemble de définition** de f.

On dit également que f est **définie** sur $\mathscr{D}$

Remarque

Certaines fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier. Parfois, cependant, l'ensemble de définition est plus petit. C'est en particulier le cas:

- s'il est impossible de calculer $f\left(x\right)$ pour certaines valeurs de x (par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ car il est impossible de diviser par zéro
- si la fonction n'a aucune signification pour certaines valeurs de x; par exemple la fonction donnant l'aire d'un carré en fonction de la longueur x de ses côtés n'a pas de sens pour x négatif.

Définition

Soit y un nombre réel. Les **antécédents** de y par f sont les nombres réels x appartenant à $\mathscr{D}$ tels que $f\left(x\right) = y$. Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédent(s).

Méthode (Calcul des antécédents)

Pour déterminer les antécédents d'un nombre y, on résout l'équation $f\left(x\right) = y$ d'inconnue x.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f\left(x\right) = \frac{x+5}{x+1}$

Pour déterminer le ou les antécédents du nombre 2 on résout l'équation $f\left(x\right) = 2$ c'est à dire :

$$\frac{x+5}{x+1} = 2$$

On obtient alors :

$x + 5 = 2\left(x+1\right)$ (« produit en croix »)

$x + 5 = 2x + 2$

$x – 2x = 2 – 5$

$–x = –3$

$x = 3$

Le nombre 2 possède un unique antécédent qui est $x = 3$.

2. Représentation graphique

Dans cette section, on munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthogonal (O, i, j)

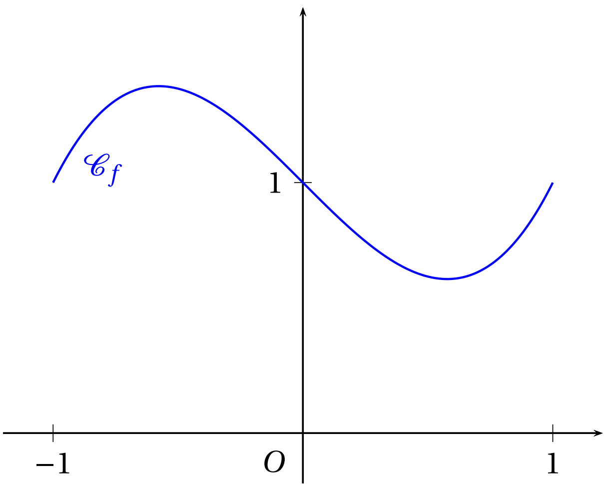
Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$.

La **représentation graphique** de f est la courbe $\mathscr{C}_f$ formée des points $M\left(x; y\right)$ où $x \in \mathscr{D}$ et $y = f\left(x\right)$

On dit aussi que la courbe $\mathscr{C}_f$ **a pour équation** $y = f\left(x\right)$.

Exemple



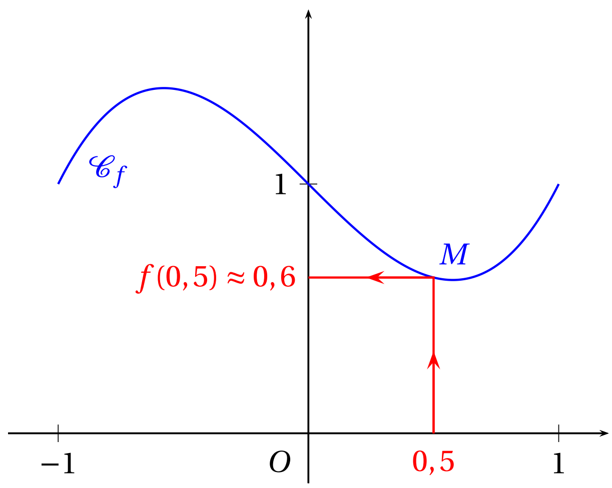
Exemple de représentation graphique d'une fonction définie sur [-1;1]

Remarque

Du fait qu'un nombre ne peut pas avoir plusieurs images, la courbe représentative d'une fonction **ne peut pas contenir plusieurs points situés sur la même « verticale »** (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

Par contre, il peut très bien y avoir plusieurs points situés sur une même horizontale comme dans l'exemple ci-dessus.

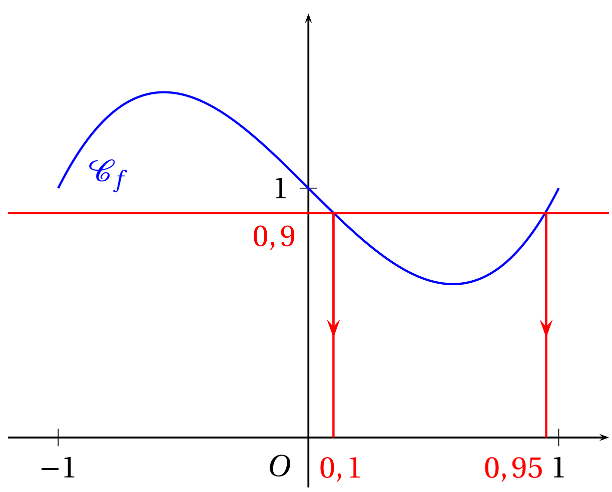
Lecture graphique de l'image d'un nombre



Pour déterminer graphiquement l'**image** de $0,5$ par la fonction f:

- on place le point de d'**abscisse** $0,5$ sur l'axe des abscisses
- on le relie au point M de la courbe qui a la même abscisse
- l'**ordonnée** du point M nous donne la valeur de $f\left(0,5\right)$; on trouve ici environ $0,6$.

Lecture graphique des antécédents d'un nombre



Pour déterminer graphiquement les **antécédents** de $0,9$ par la fonction f:

- on place le point de d'**ordonnée** $0,9$ sur l'axe des ordonnées
- on trace la droite horizontale (d'équation $y = 0,9$) qui passe par ce point
- on trace le(s) **point(s) d'intersection** de cette droite avec la courbe. Dans cet exemple on en trouve deux ; dans d'autres exemples on pourrait en trouver zéro, un, deux ou plus...
- les **abscisses** de ces points d'intersection nous donne les antécédents de $0,9$; on trouve ici deux antécédents qui valent environ $0,1$ et $0,95$.

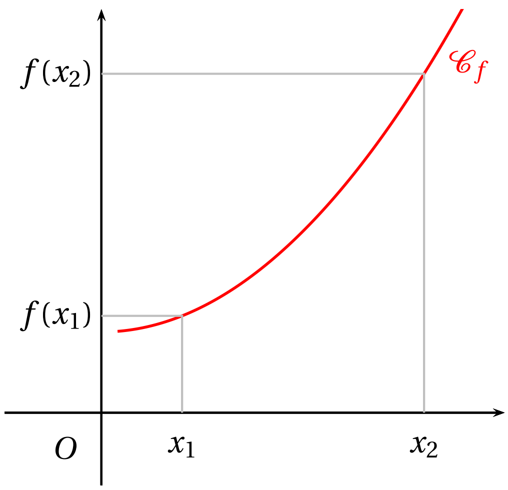
3. Variations d'une fonction

Définition

La fonction f est **croissante** sur l'intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 \leqslant x_2$ on a $f\left(x_1\right) \leqslant f\left(x_2\right)$.

Remarque

Intuitivement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f « monte » lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses (e.g. de gauche à droite)

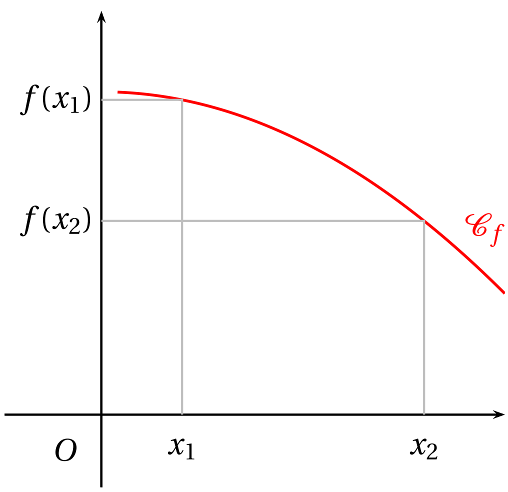


Définition

La fonction f est **décroissante** sur l'intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 \leqslant x_2$ on a $f\left(x_1\right) \geqslant f\left(x_2\right)$.

Remarque

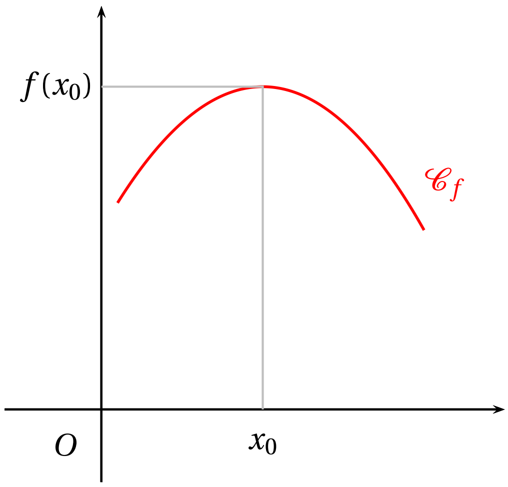
Intuitivement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f « descend » lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses (e.g. de gauche à droite)



Définition

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$.

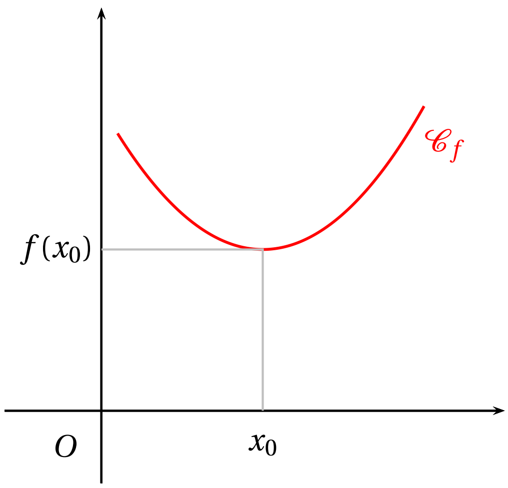
La fonction f admet un **maximum** en x_0 sur l'intervalle I si pour tout réel x de I, $f\left(x\right) \leqslant f\left(x_0\right)$. Le maximum de la fonction f sur I est alors $M = f\left(x_0\right)$



Définition

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$.

La fonction f admet un **minimum** en x_0 sur l'intervalle I si pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Le minimum de la fonction f sur I est alors $m = f(x_0)$



Remarques

- Un **extremum** est un maximum ou un minimum

- **Attention à la rédaction :**
  Lorsqu'on dit que f admet un maximum (*resp.* minimum) **en** x_0 (ou **pour** $x = x_0$), x_0 correspond à la valeur de la **variable** x et non à la valeur du maximum (*resp.* minimum).

Par exemple, dans le tableau de l'exemple ci-dessous, f admet un maximum **en** 0. Ce maximum **est égal à 6** (*Ne pas écrire que le maximum est* 0 *!*).

- Les variations d'une fonction peuvent être représentées par un **tableau de variations**

Exemple

Soit f une fonction définie sur $[-2; 5]$, croissante sur $[-2; 0]$ et décroissante sur $[0; 5]$ avec $f(-2) = -3$, $f(0) = 6$ et $f(5) = 1$

Le tableau de variations de la fonction f est :

x	-2		0		5
$f(x)$	-3	$\nearrow$	6	$\searrow$	1