Fonction linéaire – Proportionnalité

La fonction linéaire est la traduction algébrique de la proportionnalité. Ce chapitre formalise les notions vues depuis le début du collège en introduisant un nouvel outil : la fonction.

1. Définition et lien avec la proportionnalité

Une situation de proportionnalité existe lorsque l'on passe d'une grandeur à une autre en multipliant toujours par un même nombre constant.

Fonction linéaire

Soit a un nombre réel donné.
On appelle **fonction linéaire** de coefficient a, la fonction f qui, à tout nombre x, associe le nombre $a \times x$.
On note :

$$f : x \longmapsto ax$$

ou

$$f(x) = ax$$

Remarque

- Le nombre x est l'**antécédent** (la grandeur de départ).
- Le nombre $f(x)$ est l'**image** (la grandeur d'arrivée).

- Le coefficient a correspond exactement au **coefficient de proportionnalité** du tableau de valeurs associé.

Exemple

On achète des pommes à 3 € le kilogramme. Le prix est proportionnel à la masse.

- Si on note x la masse en kg.
- Le prix à payer est modélisé par la fonction linéaire p définie par :

$$p(x) = 3x$$

- Le coefficient de la fonction est **3** (prix unitaire).
- L'image de 5 est $p(5) = 3 \times 5 = 15$. Cela signifie que 5 kg coûtent 15 €.

2. Représentation graphique

Il existe une équivalence stricte entre fonction linéaire, proportionnalité et alignement avec l'origine.

Alignement avec l'origine

Dans un repère du plan :

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite** qui passe par l'**origine** du repère.
- Réciproquement, toute droite qui passe par l'origine du repère (non verticale) représente une fonction linéaire.

Coefficient directeur

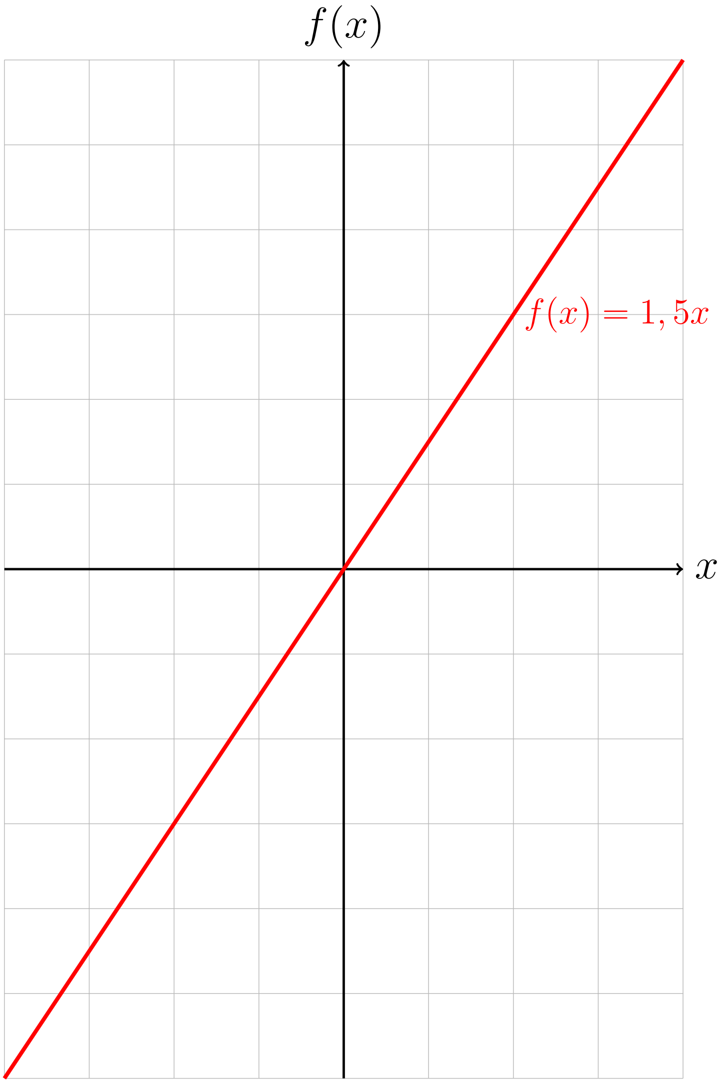
Le coefficient a est appelé **coefficient directeur** de la droite. Il indique la « pente » ou l'inclinaison de la droite :

- Si $a > 0$, la droite « monte » (la fonction est croissante).

- Si $a < 0$, la droite "descend" (la fonction est décroissante).

Exemple

Représentation de la fonction $f(x) = 1,5x$.



Graphique de la fonction linéaire $f(x) = 1,5x$

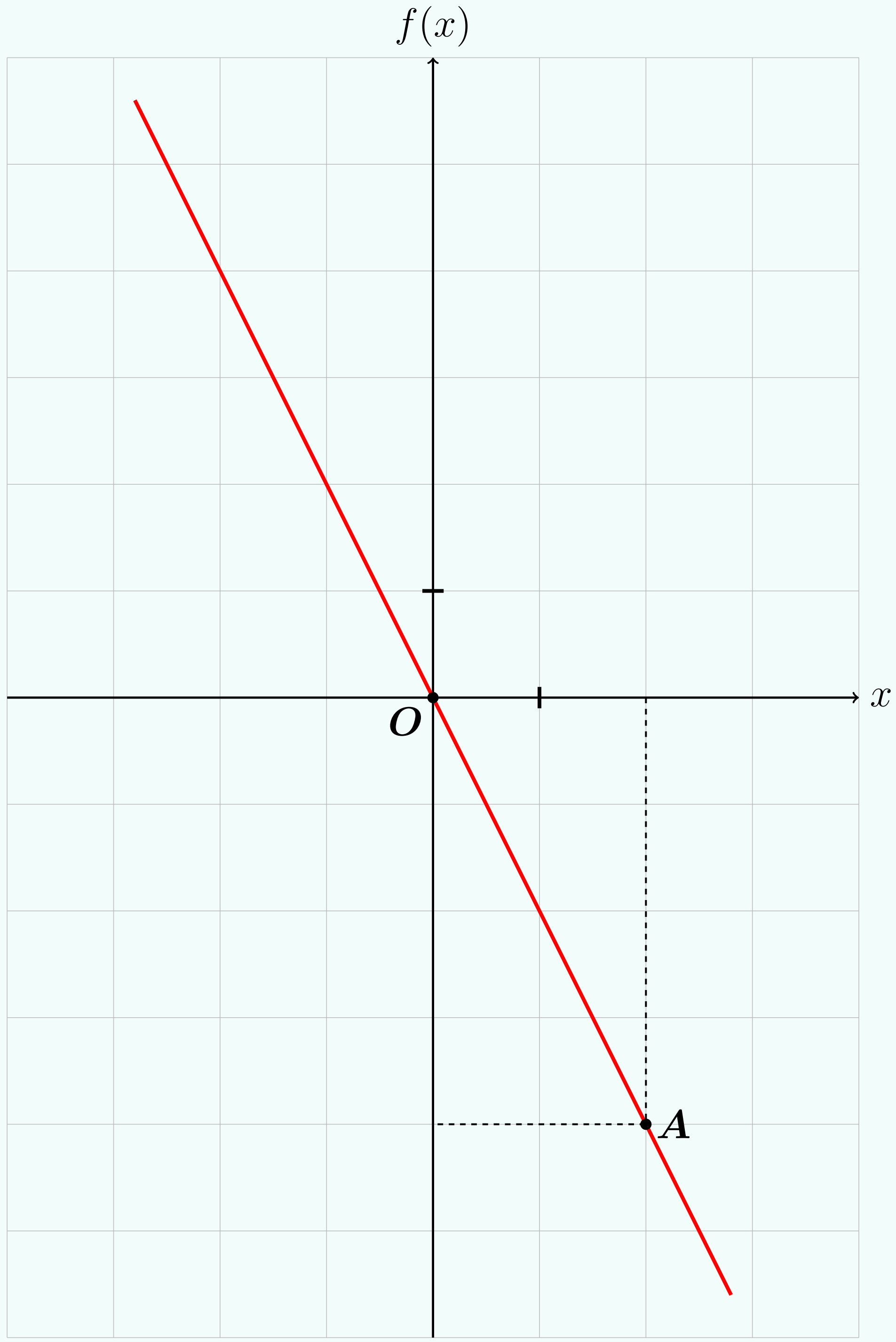
Tracer une fonction linéaire

Pour tracer la droite (d) représentant la fonction $f(x) = ax$:

1. On place le point $O(0;0)$ car la droite passe toujours par l'origine.

2. On choisit une valeur pour x (non nulle) et on calcule son image $f(x)$ pour obtenir un deuxième point.

3. On trace la droite passant par ces deux points.



Exemple : Tracer la représentation de $f(x) = -2x$.

- Point 1 : L'origine $O(0; 0)$.
- Point 2 : Si $x = 3$, alors $f(3) = -2 \times 3 = -6$. On place le point $A(3; -6)$.
- On trace la droite (OA).

3. Déterminer une fonction linéaire

Retrouver l'expression d'une fonction linéaire revient à calculer un coefficient de proportionnalité à partir d'un couple de valeurs.

Calcul du coefficient

Si f est une fonction linéaire et si l'on connaît un nombre non nul x_0 et son image $f(x_0)$, alors le coefficient a se calcule par la formule :

$$a = \frac{\text{image}}{\text{antécédent}} = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

Exemple

On cherche la fonction linéaire g telle que l'image de 4 soit 12 (noté $g(4) = 12$).

1. On sait que g est linéaire, donc de la forme $g(x) = ax$.

2. On applique la formule : $a = \dfrac{g(4)}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$.

3. Conclusion : La fonction est définie par $g(x) = 3x$.

4. Modélisation et Pourcentages

Les fonctions linéaires sont l'outil mathématique privilégié pour traiter les pourcentages d'évolution (soldes, augmentations).

Pourcentages et fonctions

- **Prendre** $t\%$ d'un nombre x revient à calculer : $f(x) = \dfrac{t}{100}x$.

- **Augmenter** un nombre x de $t\%$ revient à le multiplier par le coefficient $1 + \frac{t}{100}$.

La fonction linéaire associée est :

$$f(x) = \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$$

- **Diminuer** un nombre x de $t\%$ revient à le multiplier par le coefficient $1 – \frac{t}{100}$.

La fonction linéaire associée est :

$$f(x) = \left(1 – \frac{t}{100}\right)x$$

Cas d'une réduction (Solde)

Un magasin applique une réduction de 20% sur tous les articles.
On note x le prix initial.

1. Le coefficient multiplicateur est $1 – \frac{20}{100} = 1 – 0,2 = 0,8$.

2. La fonction linéaire modélisant le prix soldé est $p(x) = 0,8x$.

3. Pour un article à 50 €, le prix soldé est $p(50) = 0,8 \times 50 = 40$ €.