Fonction carré et second degré

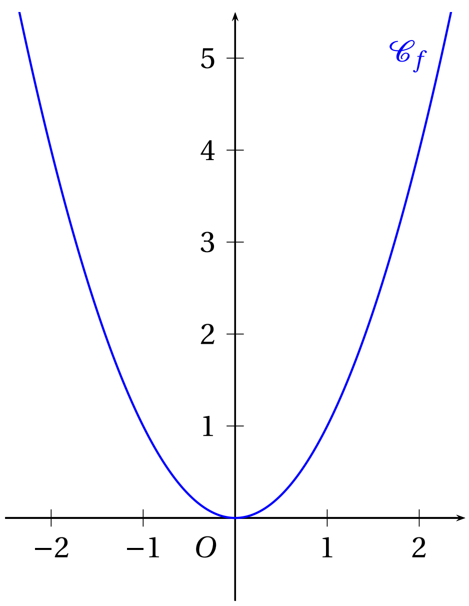
I. La fonction «carré»

Définition

La fonction « **carré** » est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2$.

Sa courbe représentative est une **parabole**.

Elle est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.



Propriété

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; \infty[$. Elle admet en 0 un minimum égal à 0.

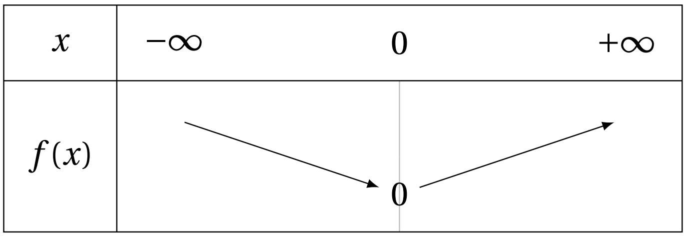


Tableau de variations de la fonction carrée

Démonstration

Démontrons par exemple que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Notons $f : x \mapsto x^2$ et soient x_1 et x_2, deux réels quelconques tels que $x_1 < x_2 < 0$.

Alors :

$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

Or $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$

et $x_1 + x_2 < 0$ car x_1 et x_2 sont tous les deux négatifs.

Donc le produit $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ est positif.

On en déduit $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Propriété

Soit a un nombre réel. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = a$

- n'admet **aucune** solution **si** $a < 0$
- admet $x = 0$ comme **unique** solution **si** $a = 0$
- admet **deux** solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ **si** $a > 0$

Exemples

- L'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ est équivalente à $x^2 = -1$. Elle n'admet donc aucune solution réelle.

II. Fonctions polynômes du second degré

Définition

Une fonction **polynôme du second degré** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$x \mapsto ax^2 + bx + c$.

où a,b et c sont des réels appelés **coefficients** et $a \neq 0$

Sa courbe représentative est une **parabole**, elle admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque

Une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est la **forme développée** d'un polynôme du second degré.

Une expression de la forme $a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ avec $a \neq 0$ est la **forme factorisée** d'un polynôme du second degré.

Théorème

Une fonction polynôme du second degré est :
Si $a > 0$:

strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{-b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{-b}{2a}; +\infty\right[$.
Si $a < 0$:

strictement croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{-b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{-b}{2a}; +\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

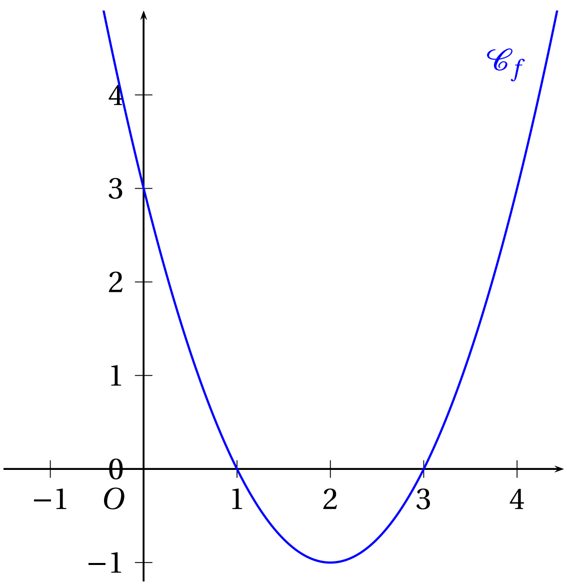
Tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré pour $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré pour $a < 0$

Exemple

Soit $f(x) = x^2–4x + 3$



Courbe représentative de $f \ : \ x \longmapsto x^2–4x + 3$

Propriété et définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$

$f\left(x\right)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f\left(x\right) = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(\alpha\right)$

Cette écriture est appelée **forme canonique**.

$\left(\alpha ; \beta\right)$ sont les coordonnées du sommet de la parabole.

Remarque

Une caractéristique de la forme canonique est que la variable x n'apparaît qu'à un seul endroit dans l'écriture.

Exemple

Reprenons l'exemple $f\left(x\right) = x^2 - 4x + 3$

On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = 2$

et $\beta = f\left(2\right) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$

donc la forme canonique de f est :

$f\left(x\right) = \left(x - 2\right)^2 - 1$