

Équations et Inéquations

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, souvent désigné par une lettre (généralement x), appelée **l'inconnue**. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles de x pour que l'égalité soit vraie.

1. Équations du premier degré

Propriétés fondamentales

Pour résoudre une équation, on cherche à « isoler » l'inconnue x . On utilise deux règles qui ne changent pas les solutions d'une équation :

- 1. Addition/Soustraction** : On peut ajouter ou retrancher le même nombre aux deux membres de l'égalité.
- 2. Multiplication/Division** : On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **non nul**.

Résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$

Objectif : Trouver la valeur de x .

Méthode :

- 1. Regrouper** les termes en x d'un côté (souvent à gauche) et les nombres constants de l'autre (à droite).
- 2. Réduire** chaque membre.
- 3. Isoler** x en divisant par son coefficient.

Exemple : Résoudre $5x - 8 = 2x + 4$

1. On regroupe les x à gauche (on soustrait $2x$) :

$$5x - 2x - 8 = 4 \iff 3x - 8 = 4$$

2. On regroupe les nombres à droite (on ajoute 8) :

$$3x = 4 + 8 \iff 3x = 12$$

3. On isole x (on divise par 3) :

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

Conclusion : La solution est 4.

2. Équations produit-nul

Propriété du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Résoudre une équation produit-nul

Exemple : Résoudre $(2x + 3)(x - 5) = 0$.

1. On identifie un produit nul.

2. On applique la propriété : « Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul ».

3. Cela revient à résoudre deux petites équations :

- Soit $2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -1.5$
- Soit $x - 5 = 0 \iff x = 5$

4. Conclusion : L'équation admet deux solutions : -1.5 et 5 .

Remarque

Si l'équation n'est pas sous forme factorisée (ex: $x^2 - 16 = 0$), il faut parfois factoriser (ici avec $a^2 - b^2$) pour se ramener à un produit nul : $(x - 4)(x + 4) = 0$.

3. L'équation $x^2 = a$

Résolution de $x^2 = a$

Selon le signe de a , les solutions diffèrent :

- Si $a < 0$: L'équation n'a **aucune solution** (un carré est toujours positif).
- Si $a = 0$: L'équation a une seule solution, $x = 0$.
- Si $a > 0$: L'équation admet **deux solutions** opposées : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

Exemple

- $x^2 = -9$: Pas de solution.
- $x^2 = 25$: Deux solutions, $\sqrt{25} = 5$ et $-\sqrt{25} = -5$.

4. Inéquations du premier degré

Définition

Une **inéquation** est une inégalité ($<$, \leq , $>$, \geq) contenant une inconnue. Résoudre une inéquation, c'est trouver **tous** les nombres qui la vérifient.

Règles de résolution et signe négatif

Les règles sont les mêmes que pour les équations, **SAUF** une exception très importante :

Quand on multiplie ou divise par un nombre NÉGATIF, on doit INVERSER le sens de l'inégalité.

Exemple

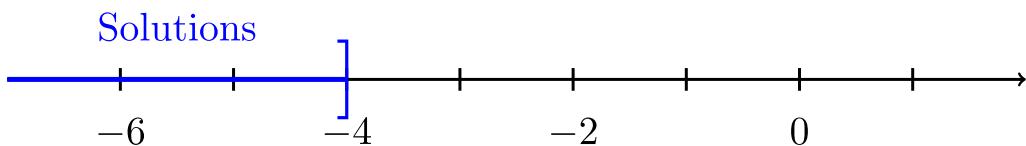
Résoudre $-3x + 2 \geq 14$.

1. On isole les x : $-3x \geq 14 - 2 \iff -3x \geq 12$.

2. On divise par -3 (négatif) \rightarrow on **inverse** le sens (\geq devient \leq) :

$$x \leq \frac{12}{-3} \iff x \leq -4.$$

Les solutions sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -4 .



Solutions de l'inéquation $x \leq -4$

5. Modéliser un problème

Mettre un problème en équation

Pour résoudre un problème, on suit généralement 4 étapes :

1. **Choix de l'inconnue** : Définir ce que représente x .

2. **Mise en équation** : Traduire le texte mathématiquement.

3. **Résolution** : Résoudre l'équation trouvée.

4. Conclusion : Interpréter le résultat et répondre à la question posée.

Exemple

Énoncé : Paul a 15 ans et son père a 40 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il exactement le double de celui de Paul ?

Résolution :

1. Choix de l'inconnue :

Soit x le nombre d'années cherché.

2. Mise en équation :

- Dans x années, Paul aura $15 + x$ ans.
- Dans x années, son père aura $40 + x$ ans.
- On veut que l'âge du père soit égal au **double** de l'âge de Paul :

$$40 + x = 2(15 + x)$$

3. Résolution :

On développe et on réduit :

$$40 + x = 30 + 2x$$

On regroupe les x (ici à droite pour garder un coefficient positif, ou règle standard à gauche) :

$$40 - 30 = 2x - x$$

$$10 = x$$

4. Conclusion :

Cela se produira dans **10 ans**.

Vérification : Dans 10 ans, Paul aura $15 + 10 = 25$ ans et son père $40 + 10 = 50$ ans. 50 est bien le double de 25.

