Equations et inéquations

I. Equations

Théorème

- Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une équation équivalente (c'est à dire qui possède les mêmes solutions).
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une équation par un même nombre **non nul**, on obtient une équation équivalente.

Remarque

Pour résoudre une équation du type $ax + b = 0$ on soustrait b à chaque membre de l'égalité:

$ax + b – b = 0 – b$ c'est à dire $ax = –b$.

Puis:

- si a est **non nul** on divise chaque membre par a : $\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$ soit $x = -\frac{b}{a}$ donc $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- si $a = 0$:
  - si $b = 0$ l'équation se réduit à $0 = 0$. Elle est toujours vérifiée donc $S = \mathbb{R}$
  - si $b \neq 0$ l'équation se réduit à $b = 0$. Elle n'est jamais vérifiée donc $S = \varnothing$

Théorème (Équation produit)

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.

En particulier, une équation du type $A(x) \times B(x) = 0$ est vérifiée si et seulement si :

$A(x) = 0$ **ou** $B(x) = 0$

Exemple

Soit l'équation $(3x–5)(x + 2) = 0$

Cette équation est équivalente à $3x–5 = 0$ **ou** $x + 2 = 0$.

C'est à dire $x = \frac{5}{3}$ **ou** $x = –2$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \left\{–2; \frac{5}{3}\right\}$

Remarques

- Lorsqu'on a affaire à une équation du second degré (ou plus), on fait « passer » tous les termes dans le membre de gauche que l'on essaie de factoriser et on utilise le théorème précédent.
- On rappelle les identités remarquables qui peuvent être utiles dans ce genre de situations:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a–b)^2 = a^2–2ab + b^2$$

$$(a + b)(a–b) = a^2–b^2$$

Théorème

Un quotient est **défini** si et seulement si son **dénominateur** est **non nul**.

S'il est défini, un quotient est **nul** si et seulement si son **numérateur** est **nul**.

Exemple

Soit l'équation $\dfrac{2x–4}{x+1}=0$

Cette équation a un sens si $x+1\neq 0$ donc si $x\neq -1$

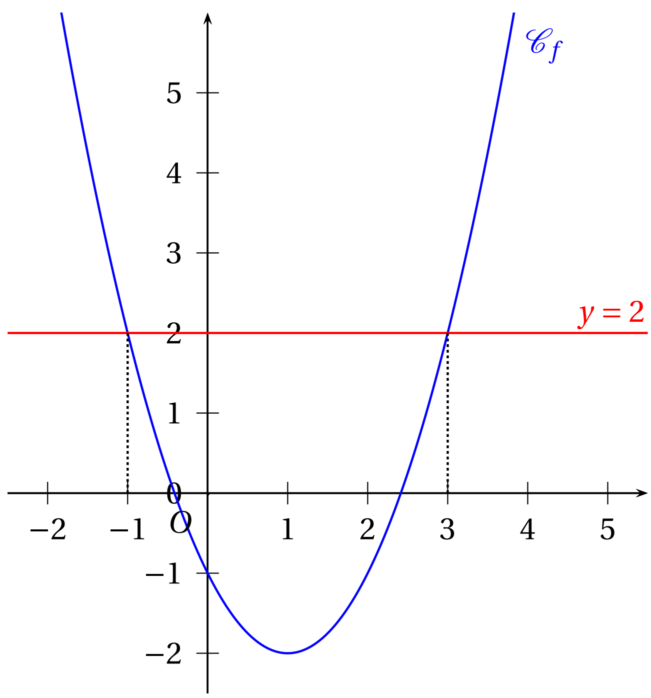
Sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{–1\}$ cette équation est équivalente à $2x–4=0$ donc à $x=2$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S=\{2\}$

Propriété

Soit f une fonction définie sur D de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y=m$

Exemple



Sur la figure ci-dessus, l'équation $f(x) = 2$ possède deux solutions qui sont -1 et 3

Théorème

L'équation $x^2 = a$:

- admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ si $a > 0$
- admet une unique solution $x = 0$ si $a = 0$
- n'admet aucune solution réelle si $a < 0$

Exemple

- L'équation $x^2 = 1$ admet deux solutions qui sont $x = -1$ et $x = 1$
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ est équivalente à $x^2 = -1$ et n'admet donc aucune solution

II. Inéquations

Théorème

- Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (c'est à dire qui à les mêmes solutions).
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre **strictement positif**, on obtient une inéquation équivalente.
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre **strictement négatif**, on obtient une inéquation équivalente **en changeant le sens de l'inégalité**.

Exemple

Pour résoudre l'inéquation $-3x+5>0$ on soustrait 5 à chaque membre de l'inéquation:

$-3x+5-5>0-5$ c'est à dire $-3x>-5$.

Puis comme -3 est négatif on divise chaque membre par -3 **en changeant le sens de l'inégalité :**

$\dfrac{-3x}{-3}<\dfrac{-5}{-3}$

$x<\dfrac{5}{3}$

Donc $S=\left]-\infty;\dfrac{5}{3}\right[$

Remarques

En appliquant le théorème précédent à l'expression $ax+b$ on obtient :

$ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$ si a est strictement positif

et $ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}$ si a est strictement négatif.

On peut alors regrouper ces deux cas dans le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Théorème (Inéquation produit)

Un produit de facteurs $A(x)B(x)$ est **positif ou nul** si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de **même signe**.

Ce produit est **négatif ou nul** si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de **signes contraires**.

Remarques

Lorsqu'on a affaire à une inéquation du second degré (ou plus), on fait « passer » tous les termes dans le membre de gauche que l'on essaie de factoriser puis on utilise un tableau de signe.

Exemple

Soit l'inéquation $(x–5)(–3x+4) \geqslant 0$

Le signe de $x–5$ est donné par le tableau:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	

Le signe de $–3x+4$ est donné par le tableau:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

On regroupe ces résultats dans un unique tableau et on utilise la règle des signes pour obtenir le signe du produit:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-5)(-3x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(x–5)(–3x+4)$ est positif ou nul sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3};5\right]$

Pour plus de détails et d'autres exemples, consulter la fiche méthode : Dresser un tableau de signes

Théorème (Inéquation quotient)

Un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ est **défini** si et seulement si son **dénominateur** $B(x)$ est **non nul**.

S'il est défini, il est **positif ou nul** si et seulement si $A(x)$ et $B(x)$ sont de **même signe** et il est **négatif ou nul** si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de **signes contraires**.

Exemple

Soit l'inéquation $\dfrac{2x-5}{x+2} \geqslant 0$

Cette inéquation a un sens si $x+2 \neq 0$ donc si $x \neq -2$

Le tableau de signe de $\dfrac{2x-5}{x+2}$ est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x-5}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\dfrac{2x-5}{x+2}$ est positif ou nul sur l'ensemble $]-\infty;-2[\, \cup \left[\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

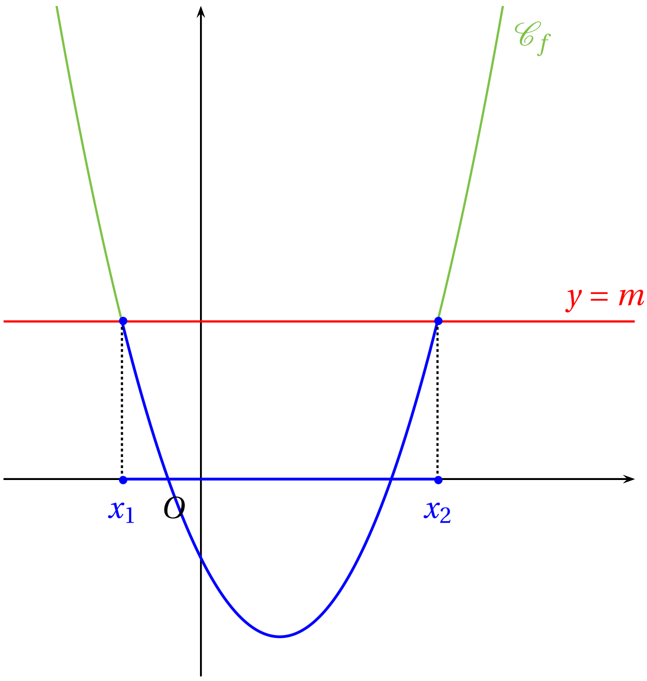
Propriété

Soit f une fonction définie sur D de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et m un nombre réel.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant m$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés **au dessous** de la droite horizontale d'équation $y = m$(On inclut les points d'intersection si l'inégalité est large, on les exclut si l'inégalité est stricte.)

- De même, les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant m$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés **au dessus** de droite horizontale d'équation $y = m$

Exemple



Sur la figure ci-dessus, l'inéquation $f(x) \leqslant m$ a pour solution l'intervalle $[x_1; x_2]$