Équations de droites

1. Équation réduite d'une droite

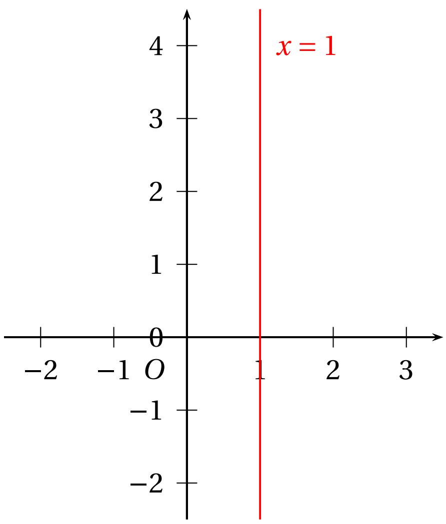
Propriété

Une droite du plan peut être caractérisée une équation de la forme :

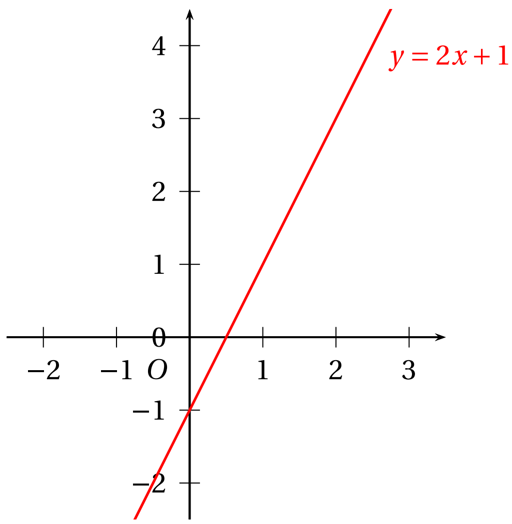
- $x = c$ si cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées (« *verticale* »)
- $y = mx + p$ si cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans le second cas, m est appelé coefficient directeur et p ordonnée à l'origine.

Exemples



Droite d'équation $x = 1$



Droite d'équation $y = 2x - 1$

Remarques

- L'équation d'une droite peut s'écrire sous plusieurs formes. Par exemple $y = 2x - 1$ est équivalente à $y - 2x + 1 = 0$ ou $2y - 4x + 2 = 0$, etc.

Les formes $x = c$ et $y = mx + p$ sont appelées **équation réduite** de la droite.

- Cette propriété indique que toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.(Voir chapitre Fonctions linéaires et affines)

- Une droite parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient direct m égal à zéro. Son équation est donc de la forme $y = p$. C'est la représentation graphique d'une fonction constante.

Propriété

Soient A et B deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque

Une fois que le coefficient directeur de la droite (AB) est connu, on peut trouver l'ordonnée à l'origine en sachant que la droite (AB) passe par le point A donc que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite.

Exemple

On recherche l'équation de la droite passant par les points $A\,(1; 3)$ et $B\,(3; 5)$.

Les points A et B n'ayant pas la même abscisse, cette équation est du type $y = mx + p$ avec :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc l'équation de (AB) est de la forme $y = x + p$. Comme cette droite passe par A, l'équation est vérifiée si on remplace x et y par les coordonnées de A donc :

$3 = 1 + p$ soit $p = 2$.

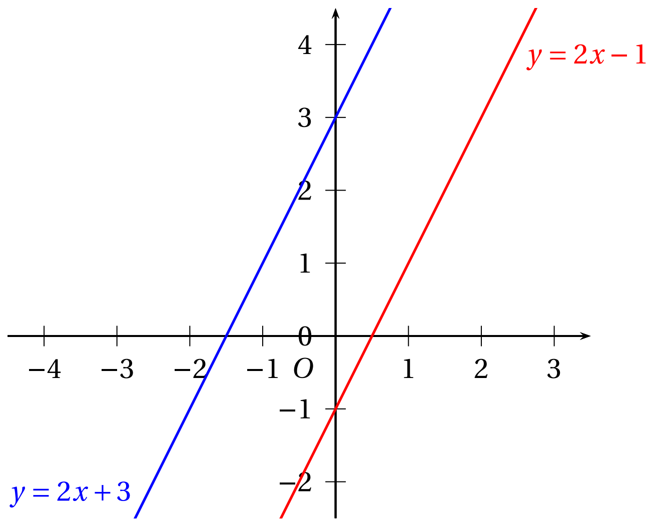
L'équation de (AB) est donc $y = x + 2$.

2. Droites parallèles – Droites sécantes

Propriété

Deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** si et seulement si elles ont le même coefficient directeur : $m = m'$.

Exemple



Équations de droites parallèles

Méthode

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Remarque

Ce système se résout simplement par substitution. Il est équivalent à :

$$\begin{cases} mx + p = m'x + p' \\ y = mx + p \end{cases}$$

Exemple

On cherche les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = 2x + 1$ et $y = 3x–1$.

Ces droites n'ont pas le même coefficient directeur donc elles sont sécantes.

Les coordonnées du point d'intersection vérifient le système :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x–1 \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x–1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3x–1 \\ y = 3x–1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3x–1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Le point d'intersection a pour coordonnées $(2; 5)$.